―研究論文―

# 変額年金保険の統計的リスク管理法
# ：局面転換モデルの利用*

秋山豪太†

国友直人‡

2005年9月30日投稿

2006年3月6日受理

**概要**

生命保険業界では変額年金保険が近年における一つの大きな話題として注目されている。変額年金保険では保険契約者は何らかの最低保証を受けられることが一般的であるが、生命保険会社にとってはそのリスク管理が問題となる。本稿では変額年金保険に関する局面転換対数正規 (RSLN) モデルと呼ばれている、一種の隠れマルコフ (Hidden Markov) モデルを利用したリスク管理法の理論と実際的問題を議論する。特にこの間に日本が経験した米国・カナダなどとかなり異なる様相のマクロ経済の動向に依存して、既存のリスク管理法を応用するときに生じうる問題点を指摘し、改善可能性を議論する。

**キーワード**

変額年金保険、最低保証、局面転換 (RS) モデル、隠れマルコフ (Hidden Markov) モデル、VaR、条件付裾期待値 (CTE)、責任準備金

*この論文は秋山豪太・国友直人 (2005) 「変額年金保険の理論と実際」(Discussion Paper CIRJE J-141, Graduate School of Economics, University of Tokyo) の改訂稿であり、原論文は2005年9月の日本統計学会・統計関連学会連合大会 (広島) 及び2005年10月のJARIP大会 (東京) において報告された。本誌のレフェリー及び川崎能典氏 (統計数理研究所) からの有益なコメントに感謝する。なお、この論文の内容は三井アセット信託銀行の見解を示すものではない。

†三井アセット信託銀行

‡東京大学大学院経済学研究科

## 1 はじめに

近年になり日本の生命保険業においても変額年金保険を巡る議論がかなり大きな話題になっている。日本の生命保険市場では従来から伝統的に存在しているタイプの生命保険の契約が低迷している中で、変額年金と呼ばれている年金保険の金融契約が急速に拡大を遂げている。変額年金保険は、その特徴として契約保有者が何らかの最低保証を受けられると同時に、支払った保険料の運用益も享受できる仕組みになっているのが一般的という意味では従来の生命保険とは異なるといえる。しかし、他方で生命保険会社は株式市場など金融市場で資金を運用していく中で、もしも運用結果が支払保証を下回った場合には、将来に損失が発生する可能性があるので、変額年金保険の販売は保険会社にとっては大きなリスクの源泉となりうる。特に生命保険のリスクを社会的に制御する仕組みとして機能しているアクチュアリー（保険数理人）にとっては重要な責任準備金の積立額の評価法も重要な課題となる。いずれの評価法を採用するにしても、生命保険会社は何らかの統計学的方法でリスクを計測し、変額年金保険の販売から将来に生じうるリスクを制御することが必要である。

変額年金保険、より一般的にはエクイティリンク型保険と呼ばれる年金保険はこの間にアメリカやカナダなど北米諸国を中心として既にかなりの販売実績がある。日本の生命保険業界においても、近年では様々な形で販売されており、成長が著しい年金保険の新しい動きの原動力となっている。こうした年金保険を巡る実務界の動向を反映して、北米のアクチュアリーなどの関係者を中心に、変額年金保険の統計的リスクの測定に関しての理論が新たな展開を見せている。そこでの議論は従来から伝統的に議論されている保険数理の枠組みとはかなり異なる形で進んでおり、変額年金保険のリスク管理論を巡る新たな問題が注目されている。特にRSLN(regime switching log-normal) モデル、すなわち局面転換対数正規モデルと呼ばれている一種の隠れマルコフ（Hidden Markov）タイプの統計的時系列モデルによる変額年金保険のリスク測定が北米では盛んに行われるようになっている。ここで局面転換モデルと呼ばれている統計的モデルとは、データがしたがっていると想定される状態変数 (state variable) がある時刻に属する局面（レジューム）や分布が時間とともに転換（あるいは変化）していく時系列モデルであるのがその最大の特長である。こうした隠れマルコフ型時系列モデルやボラティリティ(volatility) 変動の時系列モデルによる統計的リスク管理法について、日本の生命保険関係者も注目するようになっている。(例えば田中・松山 (2004) を参照[1]。)

本稿ではこうした変額年金保険を巡る議論で重要と考えられる、局面転換（RS）モデルによる変額年金保険のリスク評価法に焦点をあてる。特に統計的モデルとしての局面転換（RS）モデルの統計的性質を明らかにする。さらに、より重要な問題として、カナダや米国で議論されている統計的リスク管理法が日本のデータにおいて実証的に支持されうるか、という実務的に重要な論点について考察する。そして局面転換（RS）モデルを用いてた日本における変額年金保険のリスクについての分析結果を報告する。我々の分析によれば、この間に経験した日本のマクロ経済変動を踏まえると、カナダや米国のデータ分析にもとづく変額年金のリスク評価をそのまま日本に適用すると、リスクを巡る幾つかの基本的な問題が生じるので、慎重に様々な統計的

[1] 同問題に関する日本アクチュアリー会の説明 (http://www.actuaries.jp/info/hennen.html ) も参考となろう。

方法を利用し、当面の問題を解決すべきであるとの結論を得た。

あらかじめ本稿の構成を説明しておくと、2節では隠れマルコフ型の統計的時系列モデルとしての局面転換（RS）モデルの統計的モデルとしての性質を調べる。特に定常分布、自己共分散関数、同時密度関数などを考察する。さらに、変額年金保険のリスク評価に対して局面転換（RS）モデルを利用した日本とカナダのデータ解析の結果を示す。次に3節では推定したパラメーターを利用したシミュレーションを利用して、責任準備金の分析を行う。その際、VaR(バリュー・アット・リスク)やCTE（条件付裾期待値）などのリスク評価基準についても議論する。最後に4節では、本稿で得られた結論をまとめる。

## 2 局面転換(RS)モデルの性質と応用

株価の収益率を説明する伝統的な確率過程モデルでは、ファイナンス分野で著名なブラック・ショールズ・アプローチも含めて、株価が連続時間の幾何ブラウン運動にしたがうと仮定することが少なくない。こうした確率過程モデルが示唆するところは，いかなる離散的な時間の間隔に対して，対数差分で求めた株価の収益率は正規分布に従い，重なり合わない間隔における収益率は互いに独立である，ということになる。すなわち，$S_t$ を時点 $t$ における株価とすれば

$$\log \frac{S_t}{S_r} \sim N(\mu(t-r), \sigma^2(t-r)) \ , \ t > r \quad (2.1)$$

であり、未知母数としては一定値をとる $\mu$ とボラティリティ$\sigma$ を用いる。このように増分が互いに独立に対数正規分布にしたがうという独立(増分)対数正規 ILN (indepentent lognormal model) モデルは単純で扱いやすく，比較的短い時間の間隔に関してはかなり良い近似を与えることがファイナンス分野では知られている。しかしながら、長期の問題を考える場合には適切でないことが多いと考えられる。例えばこのモデルでは現実の金融市場において時々観察されている極端な価格変動やボラティリティ母数の変動をとらえることが出来ない[2]。

ボラティリティ変動をとらえる離散時間の統計的時系列モデルについては近年では様々な研究があるが、ここではボラティリティ水準が $K$ 個 $(K > 1)$ の離散的な値の間を変動し、離散的な値の間を確率的に転換するタイプの統計的時系列モデルを考えよう。こうしたタイプの統計モデルは一般的にはILNモデルの単純な面を維持しつつ、ILNモデルよりも現実に観察される収益率変動をより適切にとらえることが出来ることが期待できよう。特に $K = 2$ としたときに得られる離散時系列モデルの解釈としては、市場が時間の経過とともに安定的でボラティリティの低い状態と、不安定でボラティリティの高い状態とを推移するという、直観的ではあるが市場関係者の間に根強く存在する見方と整合的である。ここで高いボラティリティの状態は、例えば突発的に生じる大きな市場をとりまく不確実性に対応していると見ることができよう。

異なる経済変動の局面をある種の確率的メカニズムで推移する、というタイプの統計的時系列モデルはこれまで様々な分野で応用されている。特に局面転換が観察不能な状態変数 (state variable) に基づきマルコフ的に生じるモデルは、統計的時系列解析 (statistical time series analysis) の分野ではマルコフ転換時系列モデル[3]と呼ばれている。計量経済学においてこの

[2]関連する数理ファイナンス分野における諸問題については、例えば国友・高橋 (2003) が参考となろう。

[3]例えばこの種の統計的非線形時系列モデルについてはKitagawa (1987) を参照されたい。

種の局面転換モデルを導入したのは Hamilton (1989) であり、主としてマクロ経済分析における景気循環の複雑な時系列計量経済モデルとして利用されている。さらに、この種のマルコフ転換時系列モデルの中でも局面転換対数正規 (RSLN) モデルによる変額年金のリスク評価を提唱したのが Hardy (2001, 2003) であり、特に北米のアクチュアリー（保険数理人）の間で話題となっている。

ここでは各局面での収益率がしたがう分布として、特に対数正規分布に限ることなく、より一般の局面転換 (RS) モデルの性質を考察しておこう。局面転換（RS）モデルを株価収益率に適用する為に、各期において株価の収益率の過程が $K$ 個の状態の局面（レジューム）の一つにあると考えよう。ここで $\rho_t$ で間隔 $[t, t+1)$ における局面（レジューム）を表し（$\rho_t = 1, 2, \cdots, K$)、$S_t$ は $t$ におけるポートフォリオの総価値、

$$\log \frac{S_{t+1}}{S_t}\bigg|\rho_t \sim F(\mu_{\rho_t}, \sigma^2_{\rho_t}) \qquad (2.2)$$

とする。ただし $\mu_{\rho_t}$ と $\sigma^2_{\rho_t}$ は各局面での位置 (location) とスケール (scale) をそれぞれ表すものとする。ここで、局面転換の推移確率行列 $\mathbf{P} = (p_{ij})$ を

$$p_{ij}(t+1) = \mathbf{P}(\rho_{t+1} = j|\rho_t = i) \qquad (2.3)$$
$$i = 1, 2, \cdots, K, j = 1, 2, \cdots, K$$

として、収益率 $R_{t+1} = log\frac{S_{t+1}}{S_t}$ の定常分布を考えよう。ここでマルコフ型推移確率が時間に依存せず定常的であり、条件付確率 $p_{ij}(t+1) = p_{ij}$ が方程式

$$\boldsymbol{\pi}\mathbf{P} = \boldsymbol{\pi} \qquad (2.4)$$

を満たす定常分布を $\boldsymbol{\pi}$ としよう。ただし $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_k)$, $\sum_{i=1}^k \pi_i = 1$ $(\pi_k \geq 0)$ である。

ここで各局面における収益率は互いに独立にそれぞれ分布関数 $F_i$ $(i = 1, \cdots, k)$ にしたがうと仮定すれば、収益率の無条件分布は分布 $F_i$ $(i = 1, \cdots, k)$ の混合分布 (mixture distribution) となる。これを $R_t \sim \sum_{i=1}^k \pi_i F_i(\theta)$, $F_i(x|\theta) = F_i(\frac{x-\mu_i}{\sigma_i})$ で表そう。このとき、収益率の条件付分布は

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(R_t \leq r_0|\rho_{t-1} = i_1) \qquad (2.5)\\ = & \sum_{i_0=1}^K \mathbf{P}(R_t \leq r_0, \rho_t = i_0|\rho_{t-1} = i_1)\\ = & \sum_{i_0=1}^K \mathbf{P}(R_t \leq r_0|\rho_t = i_0, \rho_{t-1} = i_1)\\ & \times \mathbf{P}(\rho_t = i_0|\rho_{t-1} = i_1)\\ = & \sum_{i_0=1}^K F_{i_0}(\frac{r_0 - \mu_{i_0}}{\sigma_{i_0}})p_{i_1 i_0} \end{aligned}$$

となる。したがって、収益率の分布関数は

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(R_t \leq r_0) \qquad (2.6)\\ = & \sum_{i_1=1}^K \mathbf{P}(R_t \leq r_0|\rho_{t-1} = i_1)\mathbf{P}(\rho_{t-1} = i_1)\\ = & \sum_{i_0=1}^K F_{i_0}(\frac{r_0 - \mu_{i_0}}{\sigma_{i_0}})\pi_{i_0} \end{aligned}$$

で与えられる。特に分布関数がルベーグ測度に関して絶対連続であって、各局面での密度関数が $f_i(\cdot)$ で与えられるとすると、$R_t$ の期待値は

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}[R_t] \qquad (2.7)\\ = & \frac{1}{\sigma_{i_0}} \sum_{i_0=1}^K \int_{-\infty}^{\infty} r_0 f_{i_0}(\frac{r_0 - \mu_{i_0}}{\sigma_{i_0}}) dr_0 \times \pi_{i_0}\\ = & \sum_{i_0=1}^K \pi_{i_0}\{\mu_{i_0} + \sigma_{i_0}\mathbf{E}[x_{i_0}]\} \end{aligned}$$

と表現できる。ただし、$x_{i_0}$ は基準化した収益率 $x_{i_0} = \frac{r_0 - \mu_{i_0}}{\sigma_{i_0}}$ であるが、$\mathbf{E}(x_{i_0}) = 0$ にとれば表現は簡単化される。次に収益率分布の同時分布の性質を調べてみよう。まず $u \geq 1$ に対

して条件付確率の表現

$$\mathbf{P}(R_t \le r_0, R_{t-u} \le r_u | \rho_{t-u-1} = i_{u+1}) \quad (2.8)$$
$$= \sum_{i_u=1}^{K} \mathbf{P}(R_t \le r_0, R_{t-u} \le r_u | \rho_{t-u} = i_s,$$
$$\rho_{t-u-1} = i_{u+1}) \times \mathbf{P}(\rho_{t-u} = i_u | \rho_{t-u-1} = i_{u+1})$$
$$= \sum_{i_u=1}^{K} \sum_{i_{u-1}=1}^{K} \cdots \sum_{i_0=1}^{K} \mathbf{P}(\frac{R_t - \mu_{i_0}}{\sigma_{i_0}} \le \frac{r_0 - \mu_{i_0}}{\sigma_{i_0}},$$
$$\frac{R_{t-u} - \mu_{i_u}}{\sigma_{i_u}} \le \frac{r_u - \mu_{i_u}}{\sigma_{i_u}} |$$
$$\rho_t = i_0, \cdots, \rho_{t-u} = i_u, \rho_{t-u-1} = i_{u+1})$$
$$\times p_{i_{u+1} i_u} p_{i_u i_{u-1}} \cdots p_{i_1 i_0}$$

を利用しよう。これより、二時点の収益率の同時分布関数は

$$\mathbf{P}(R_t \le r_0, R_{t-u} \le r_u) \quad (2.9)$$
$$= \sum_{i_u=1}^{K} \sum_{i_0=1}^{K} F_{i_0}(\frac{r_0 - \mu_{i_0}}{\sigma_{i_0}}) F_{i_u}(\frac{r_u - \mu_{i_u}}{\sigma_{i_u}}) \pi_u p_{i_u i_0}$$

と表現 $(u > 0)$ することができる。ここで $p_{i_u i_0} = P(\rho_u = i_0 | \rho_{t-u} = i_u)$ であることに注意しておく。同時分布関数より同時密度関数は

$$f(R_t = r_0, R_{t-u} = r_u)$$
$$= \sum_{i_u=1}^{K} \sum_{i_0=1}^{K} f_{i_0}(\frac{r_0 - \mu_{i_0}}{\sigma_{i_0}}) f_{i_u}(\frac{r_u - \mu_{i_u}}{\sigma_{i_u}})$$
$$\times \frac{1}{\sigma_{i_u}} \frac{1}{\sigma_{i_0}} \pi_u p_{i_u i_0}$$

で与えられることがわかる。次に収益率分布の自己共分散 (autocovariance) 構造について調べておこう。ここで積率 $(u > 0)$ についての評価

$$\mathbf{E}[R_t R_{t-u}]$$
$$= \sum_{i_u=1}^{K} \sum_{i_0=1}^{K} \int_{-\infty}^{\infty} r_0 r_u f_{i_0}(\frac{r_0 - \mu_{i_0}}{\sigma_{i_0}}) f_{i_u}(\frac{r_u - \mu_{i_u}}{\sigma_{i_u}})$$
$$\times \frac{1}{\sigma_{i_u}} \frac{1}{\sigma_{i_0}} \pi_u p_{i_u i_0} dr_0 dr_u$$
$$= \sum_{i_u=1}^{K} \sum_{i_0=1}^{K} [\mu_{i_0} + \sigma_{i_0} \mathbf{E}(x_{i_0})][\mu_{i_u} + \sigma_{i_u} \mathbf{E}(x_{i_u})]$$
$$\pi_u p_{i_u i_0}$$

を用いる。自己共分散関数 (autocovariance function) は

$$\mathbf{Cov}(R_t, R_{t-u}) \quad (2.10)$$
$$= \sum_{i_u=1}^{K} \sum_{i_0=1}^{K} [\mu_{i_0} + \sigma_{i_0} \mathbf{E}(x_{i_0})][\mu_{i_u} + \sigma_{i_u} \mathbf{E}(x_{i_u})]$$
$$\times \pi_{i_u} p_{i_u i_0}$$
$$- \sum_{i_u=1}^{K} [\mu_{i_0} + \sigma_{i_0} \mathbf{E}(x_{i_0})] \pi_{i_0}$$
$$\times \sum_{i_0=1}^{K} [\mu_{i_u} + \sigma_{i_u} \mathbf{E}(x_{i_u})] \pi_{i_u}$$
$$= \sum_{i_u=1}^{K} \sum_{i_0=1}^{K} [\mu_{i_0} + \sigma_{i_0} \mathbf{E}(x_{i_0})][\mu_{i_u} + \sigma_{i_u} \mathbf{E}(x_{i_u})]$$
$$\times \pi_{i_u} (p_{i_u i_0} - \pi_{i_0})$$

で与えられる。したがって、もし $p_{i_u i_0} = \mathbf{P}(\rho_u = i_0 | \rho_{t-u} = i_u) = \pi_{i_0}$ となるならば、共分散はゼロ ($\mathbf{Cov}(R_u, R_{t-u}) = 0$ $(u \ge 1)$) であることが分かる。また $\mathbf{E}[x_{i_0}] = 0$ にとれば収益率の分散は、

$$\mathbf{Var}(R_t) = \sum_{i_0=1}^{K} [\mu_{i_0}^2 + \sigma_{i_0}^2 \mathbf{E}(x_{i_0}^2)] \pi_{i_0} - (\sum_{i_0=1}^{K} \mu_{i_0} \pi_{i_0})^2$$

となる。全く同様に、$n \ge 1$ に対する積率は

$$\mathbf{E}[R_t^n] = \sum_{i_0=1}^{K} \pi_{i_0} \mathbf{E}[(\mu_{i_0} + \sigma_{i_0} x_{i_0})^n] \quad (2.11)$$

と表現される。さらに、$n_1, n_2 \ge 1$ に対する同時積率を求めると

$$\mathbf{E}[R_t^{n_1} R_t^{n_2}]$$
$$= \sum_{i_u=1}^{K} \sum_{i_0=1}^{K} \mathbf{E}[(\mu_{i_0} + \sigma_{i_0} x_{i_0})^{n_1} (\mu_{i_u} + \sigma_{i_u} x_{i_u})^{n_2}] \pi_u p_{i_u i_0}$$

で与えられる。したがって、特に二乗収益率の $R_t^2$ の自己相関関数 $(u > 0)$ をとりあげると

$$\mathbf{Cov}(R_t^2, R_{t-u}^2) \quad (2.12)$$
$$= \sum_{i_u=1}^{K} \sum_{i_0=1}^{K} \mathbf{E}[(\mu_{i_0} + \sigma_{i_0} x_{i_0})^2 (\mu_{i_u} + \sigma_{i_u} x_{i_u})^2]$$
$$\times \pi_{i_u} (p_{i_u i_0} - \pi_{i_0})$$

で与えられることがわかる。

なお、収益率の二乗変動はボラティリティの変動に対応していると考えられる。株価に幾何ブラウン運動を想定すると、異なる期間での収益率

は独立で正規分布にしたがい、ボラティリティは一定値をとる。それに対して、局面転換モデルでは自己共分散関数はゼロではなく、収益率のボラティリティも一定とは限らずに変動するので重要な意味を持っている。ここで、さらに収益率がしたがう各局面において分散の存在を仮定しよう。すなわち、ある正定数 $M_1$ と $M_2$ が存在して $\mathbf{E}[(\mu_{i_0}+\sigma_{i_0}x_{i_0})^4] \le M_1$, $\mathbf{E}[(\mu_{i_u}+\sigma_{i_u}x_{i_u})^2] \le M_2$ とする。このとき、もし状態変数の (有限) マルコフ連鎖で表現された局面転換過程がエルゴード性 (ergodic) を持てば、それぞれある正定数 $\eta\ (<1)$ が存在して、

$$
\begin{aligned}
&|\mathbf{Cov}(R_t^2, R_{t-u}^2)| \qquad (2.13)\\
\le\ & M_1 \left| \sum_{i_u=1}^{K} \sum_{i_0=1}^{K} [\mathbf{P}(\rho_t = i_0, \rho_{t-u} = i_u) - \mathbf{P}(\rho_t = i_0)\mathbf{P}(\rho_{t-u} = i_u)] \right| \\
=\ & O(\eta^u)
\end{aligned}
$$

および

$$
\begin{aligned}
&|\mathbf{Cov}(R_t, R_{t-u})| \qquad (2.14)\\
\le\ & M_2 \left| \sum_{i_u=1}^{K} \sum_{i_0=1}^{K} [P(\rho_t = i_0, \rho_{t-u} = i_u) - P(\rho_t = i_0)P(\rho_{t-u} = i_u)] \right| \\
=\ & O(\eta^u)
\end{aligned}
$$

を満足することがわかる。以上の考察より得られた局面転換 (RS) モデルの一般的性質は次のようにまとめることができる。

**定理 1** ：局面転換 (RS) モデルにおいて局面転換の推移確率 (transition probability) が時間に依存せず非既約 (irreducible) かつ非循環 (a-periodic) のマルコフ連鎖 (Markov chain) とする。このとき収益率 $R_t$ と $R_{t-s}$ の同時分布は (2.9) で与えられる。各局面における収益率の分散が有限ならば自己共分散関数は (2.10) で与えられる。またこれらの仮定の下で、収益率と二乗収益率は弱従属 (weakly dependent) の弱定常過程 (weakly stationary process) となる。

次に各局面において収益率がしたがう分布を仮定して母数を推定する最尤推定法 (maximum likelihood method) を考察しよう。ただし、ここでは議論を簡単化するために $K=2$ のケースを考えることにする。一般には $K>2$ の場合も同様に扱うことができるが、データへのフィットや推定した結果の解釈はそれほど自然なものとはならないことが多いことをここでは注意しておく。特に収益率が各局面でしたがう分布が互いに独立な正規分布にしたがうと仮定すると、推定する母数ベクトルは $\boldsymbol{\theta}=\{\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,p_{12},p_{21}\}$ の 6 個となる。ここで $\pi$ は定常性の条件、$\pi_1 p_{11}+\pi_2 p_{21}=\pi_1$, $\pi_1 p_{12}+\pi_2 p_{22}=\pi_2$ より

$$
\pi_1 = \frac{p_{21}}{p_{12}+p_{21}}, \pi_2 = 1-\pi_1 = \frac{p_{12}}{p_{12}+p_{21}}
$$

で与えればよい。

ここで観測期間において $n$ 個のデータが観察されたとすると、観察量 $\mathbf{R}=(R_1,R_2,\cdots,R_n)$ の尤度関数は,

$$
\begin{aligned}
&L_n(\theta) \qquad (2.15)\\
=\ & f(R_1|\boldsymbol{\theta})f(R_2|R_1,\boldsymbol{\theta})\cdots f(R_n|R_{n-1},\cdots,R_1,\boldsymbol{\theta})
\end{aligned}
$$

と表現される。ここで $f$ は収益率 $R$ の密度関数、$\boldsymbol{\theta}$ は未知母数ベクトル、さらに $t-1$ 時点までの情報を所与とした $t$ 番目の観測量がしたがう対数条件付密度関数は

$$
\log f(R_t|R_{t-1},R_{t-2},\cdots,R_1,\boldsymbol{\theta})
$$

である。尤度関数を構成する要素、例えば時刻 $t$ における条件付分布はそれぞれ $t-1$ までの観測値を所与として逐次的に計算することができる。実際に与えられたデータに対して尤度関数を最大化する解は明示的には可能ではない。そこで最適化アルゴリズムとしてよく知られている EM(Expectation-Maximization) アルゴリズムを利用することで実行することができる。こ

の計算アルゴリズムは、母数ベクトルについてまず初期値を与え、その初期値得られた観察値を元に各時点における局面変化の確率を推定することを行う。次に推定された確率を利用して時点 $t=1,2,\cdots,n$ のデータに対する尤度関数を求め、それを4個の母数について最適化することにより母数を推定する。さらに、推定された母数を二回目の初期値として再び計算を実行し、この繰り返し計算を収束するまで行うというものである[4]。

ここで、こうして得られた最尤推定量の漸近的性質については、独立標本に関する議論を直接に適用することはできないことに注意しておく。定理1にまとめておいたように、収益率データは弱定常過程となるので、統計的時系列モデルのパラメトリック推定問題となっている。局面転換モデルは非線形時系列モデルであるので教科書的な線形モデルに関する議論を適用することもまた可能ではない。ところが、幸いなことに隠れマルコフ (Hidden Markov) モデルについてはこれまで統計的時系列解析においては幾つかの研究があり、その理論的結果を適用することで最尤推定量の漸近的結果が得られる。特に観測されない離散的状態変数の取りうる値が有限個であって観測データが連続変量、である隠れマルコフ型の統計的時系列モデルにおける最尤推定量の一致性については Leroux (1982) の結果、漸近正規性については Bickel et. al.(1998) の結果が適用できる。各局面での収益率の分布が一般の場合において最尤推定量のよい性質を導くための正則条件についてはこれら二つの論文に詳しく説明されている。例えば各局面における分布が正規分布であれば、その正則条件はかなり単純化される。ここで母数空間 $\boldsymbol{\Theta}=\{\mu_1,\mu_2,0<\sigma_1,0<\sigma_2,0<p_{12}<1,0<p_{21}<1\}$ とすると、真の母数値が母数空間の境界上にあると、通常の漸近的結果が必ずしも成立しないことに注意しておこう。統計家の間ではよく知られている重要な例としては、各局面の分布が正規分布にしたがうとき、分散の母数 $\sigma_2\longrightarrow 0$ とすると尤度関数をいくらでも大きくすることができ、尤度関数が発散する可能性がある。こうした問題を回避するには、母数空間を十分に大きい正実数 $M_i\ (i=3,4,5)$ により

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Theta} &= \{|\mu_1|\le M_3,|\mu_2|\le M_3,1/M_4\le\sigma_1,\\ &\qquad \sigma_2\le M_4,1/M_5\le p_{12},p_{21}\le 1-1/M_5\}\end{aligned}$$

と制約することが考えられる。ここで新たな結果ではないが、収束計算や推定結果の解釈など応用上も重要であるので念のためにここでの議論を次のようにまとめておこう。

**定理2**：局面転換 (RS) モデルにおいて局面転換の推移確率が時間に依存せず、非既約 (irreducible) かつ非循環 (a-periodic) のマルコフ連鎖 (Markov chain) とする。収益率 $R_t$ は各局面において密度関数を持ち、分散が存在し、さらに同時分布が母数について識別可能、母数空間がコンパクトで真の母数がその内点となる正則条件を満足するものとする。このとき最尤推定量は一致性と漸近正規性を持つ。すなわち、$n\longrightarrow\infty$ のとき

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}\xrightarrow{p}\boldsymbol{\theta}_0\,, \tag{2.16}$$

かつ

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}}-\boldsymbol{\theta}_0)\xrightarrow{d}N(\mathbf{0},\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta}_0)^{-1}) \tag{2.17}$$

となる。ただし $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ は最尤推定量、$\boldsymbol{\theta}_0$ は真の母数ベクトル、$\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta}_0)$ は尤度関数より求められる（正定符号行列である）フィッシャー情報行列

$$\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta}_0)=\mathbf{lim}_{n\to\infty}\frac{1}{n}\mathbf{E}[-\frac{\partial\log L_n(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\theta}\partial\boldsymbol{\theta}'}|_{\boldsymbol{\theta}_0}]$$

[4]例えば Hamilton (1990) は計算アルゴリズムを詳しく説明しているが、本稿でのデータ分析はその EM 計算アルゴリズムを利用した。

とした。

次に各局面での収益率の条件付分布を正規分布と仮定した上で、カナダのデータと日本のデータを用いた推定結果を示しておく。ここでカナダのデータとしては主要な年金保険の分離ファンド契約において共通の指数になっているトロント証券取引所 300 種（TSE300：Toronto Securities Exchange300）を用いる。ここで配当込みの TSE300 の月次の対数収益率とその 12ヵ月の移動標準偏差（移動ボラティリティ）を図 1 に示しておくが、データの期間は TSE が導入された 1956 年 1 月からから 1999 年 12 月までの 527 個である。日本に関しては、株式指標として標準的な TOPIX の月次の対数収益率 (配当無) を用いた。月次対数収益率とその 12ヵ月の移動標準偏差を図 2 に示しておくが、データの期間は 1956 年 1 月から 1999 年 12 月まで、データ数は 527 個である。

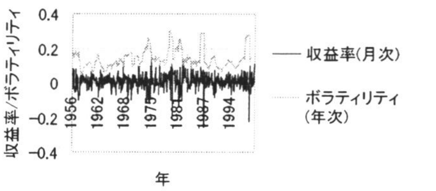


図 1: 月次収益率とボラティリティ(TSE300)

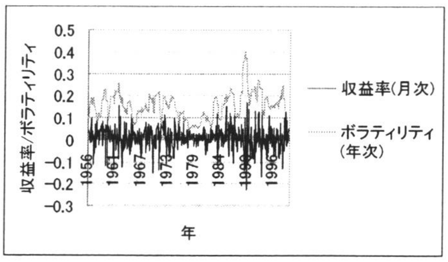


図 2: 月次収益率とボラティリティ(TOPIX)

| | $\hat{\mu}$ | $\hat{\sigma}$ |
|---|---|---|
| TSE 300 1956-1999 | 0.008 | 0.156 |
| TOPIX 1956-1999 | 0.007 | 0.175 |
| TOPIX 1956-1979 | 0.009 | 0.160 |
| TOPIX 1980-1989 | 0.014 | 0.144 |
| TOPIX 1990-1999 | -0.004 | 0.225 |

表 1: 月次収益率の平均と年次のボラティリティ

全期間の対数収益率を用いたデータの平均とボラティリティの推定値をまとめると、表 1 のようになる。1956 年から 1999 年までのデータで見ると、TSE300 の年次のボラティリティの推定値は 0.156、TOPIX の年次のボラティリティの推定値は 0.175 となっている．TSE300 の月次の対数収益率の平均は 0.008，TOPIX の月次の対数収益率の平均は 0.007 となっている．なお、TOPIX に関しては期間を三つに分けて，その平均，ボラティリティの推定値を示しておく。これは 4 節で局面転換 (RS) モデルを利用して責任準備金の問題を考えるが、その際には楽観的なシナリオと悲観的なシナリオとして利用し、責任準備金の額がどう変化するのかを調べる為である。

図 1 より、TSE のデータでは 1980 年初頭に、TOPIX のデータでは 1990 年初頭に、特にボラティリティの高い状態が数ヶ月続いている。こうした観察事実を独立 (増分) 対数正規 (ILN) モデルの実現値としてとらえることが難しいので、局面転換（RS）モデルでどのようにとらえられるのか、推定結果を表 2 に示しておく。表 2 より、TSE300 と TOPIX はともに、1956 年から 1999 年のデータに関して予想された結果が得られることがわかる。すなわち、両ケースとも高ボラティリティ局面の平均が低ボラティリティ局面の平均を下回っており，年次のボラティリティは 20 %前半になっている。しかしながら、相違

点も少なくない。TSE300 と TOPIX では、局面間の平均の差が 0.029, 0.012 とかなり異なっている。局面が転換する確率も、特に $p_{21}$ に関しては、TSE300 が 0.191, TOPIX が 0.045 と異なっている。このことは, TSE300 のデータのほうが TOPIX のデータより高ボラティリティの状態が続かないということを示唆している。ここで局面 $i$ が $t$ 月続く確率は $p_{ii}^{t-1}p_{ij}$ であるから局面 $i$ が継続する平均期間は $\frac{1}{p_{ij}}$ になる。したがって、TSE300 のデータの高ボラティリティ局面の状態にある平均期間は、約 5.2ヵ月であり、TOPIX では約 22ヶ月と推定される。

ここで TOPIX のデータの期間別の推定結果について見ると、予想していた結果とは異なるところがある。特に、1980-1989 においては、高ボラティリティ局面の方が平均が高く出ている。これはバブル期を含む当時のマクロ経済の動向を反映してのものと解釈できよう。1990-1999 においては、バブル崩壊をうけて高ボラティリティ局面と低ボラティリティ局面の平均がともに負になっている。また, それぞれの局面（レジューム）間の平均の差が異なっていること、$p_{21}$ に関しては, 結果に大きな違いが見られることが読み取れる。すなわち、日本のデータ分析においては局面間の推移確率の推定が不安定となったことが一因であろうと考えられる。

ところで上で求めた推定結果を用いて独立(増分)対数正規 (ILN) モデルとの比較を行おう。まず ILN モデル

$$R_t = \mu + \sigma\epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim N(0,1) \qquad (2.18)$$

のパラメーターの最尤推定法による推定結果を表 3 に示しておく。収益率が互いに独立に対数正規分布に従うと仮定すると、標本平均と標本分散が最尤推定値になるが、ここでは比較のため、全 5 種類の局面転換対数正規 (RSLN) モデルと独立 (増分) 対数正規 (ILN) モデルの尤度関

| | $\hat{\mu}_1$ / $\hat{\mu}_2$ | $\hat{\sigma}_1$ / $\hat{\sigma}_2$ | $\hat{p}_{12}$ / $\hat{p}_{21}$ |
|---|---|---|---|
| TSE 300 1956-1999 | 0.012 | 0.039 | 0.031 |
| | (0.002) | (0.001) | (0.008) |
| | -0.017 | 0.068 | 0.191 |
| | (0.014) | (0.010) | (0.059) |
| TOPIX 1956-1999 | 0.014 | 0.033 | 0.055 |
| | (0.002) | (0.001) | (0.015) |
| | 0.002 | 0.061 | 0.045 |
| | (0.004) | (0.003) | (0.012) |
| TOPIX 1956-1979 | 0.013 | 0.046 | 0.053 |
| | (0.002) | (0.002) | (0.013) |
| | -0.047 | 0.065 | 0.723 |
| | (0.005) | (0.003) | (0.169) |
| TOPIX 1980-1989 | 0.012 | 0.029 | 0.033 |
| | (0.003) | (0.002) | (0.019) |
| | 0.022 | 0.059 | 0.070 |
| | (0.011) | (0.007) | (0.042) |
| TOPIX 1990-1999 | -0.001 | 0.058 | 0.008 |
| | (0.005) | (0.004) | (0.008) |
| | -0.035 | 0.105 | 0.116 |
| | (0.056) | (0.040) | (0.131) |

表 2: 最尤推定法による RSLN モデルの母数推定値

（注：カッコ (·) は標準偏差の推定値を示している。）

| | $\hat{\mu}$ | $\hat{\sigma}$ |
|---|---|---|
| TSE 300 1956-1999 | 0.008 | 0.046 |
| | (0.002) | (0.001) |
| TOPIX 1956-1999 | 0.007 | 0.051 |
| | (0.002) | (0.002) |
| TOPIX 1956-1979 | 0.009 | 0.046 |
| | (0.003) | (0.002) |
| TOPIX 1980-1989 | 0.014 | 0.042 |
| | (0.004) | (0.003) |
| TOPIX 1990-1999 | -0.004 | 0.065 |
| | (0.006) | (0.004) |

表 3: 最尤推定法による ILN モデルの母数推定値

(注：カッコ (·) は標準偏差の推定値を示している。)

| | RSLN | ILN |
|---|---|---|
| TSE 300 1956-1999 | 917.38 | 888.19 |
| TOPIX 1956-1999 | 852.48 | 825.14 |
| TOPIX 1956-1979 | 477.14 | 472.16 |
| TOPIX 1980-1989 | 223.07 | 206.66 |
| TOPIX 1990-1999 | 161.40 | 145.69 |

表 4: 2 つのモデルの尤度関数値

数の値を表 4 に示しておく。

ここでエクイティリンク型保険では長期にわたる収益率分布の裾をどの様にとらえるかが問題であることに注意しよう。そこで局面転換モデルの局面に滞在回数の分布関数を求め、そこから、局面転換モデルによる長期における収益率の分布を求め、通常の独立 (増分) 対数正規モデルによる結果と比較することを考えよう。

確率変数 $M$ を局面 1 に滞在した総回数とすると、$M \in \{0, 1, 2 \cdots, n\}$ の可能性がある。また確率 $\mathbf{P}(M = m) = p(m)$ で表現し、さらに $M_t$ を期間 $[t, n)$ において局面 1 に滞在した総回数としよう。そして、$\mathbf{P}(M_t = m|\rho_{t-1})$ $(m = 0, 1, \cdots, n-t : t = 1, \cdots, n-1)$ を考察しよう。まず明らかに、$m > n-t,\ m < 0$ に対しては $\mathbf{P}(M_t = m|\rho_{t-1}) = 0$ である。また、例えば $\mathbf{P}(M_{n-1} = 0|\rho_{t-1} = 1)$ は前の時点 $t-1$ では局面 1 に滞在し、その後は局面 1 に滞在することがない確率を表している。ここで $t \in [n-2, n-1)$ に対して $\mathbf{P}(M_{n-1} = 1|\rho_{t-1} = j) = p_{j1}$ $(j = 1, 2)$, $\mathbf{P}(M_{n-1} = 0|\rho_{t-1} = j) = p_{j2}$ であり、初期条件として $\mathbf{P}(\rho_t = j) = \pi_j$ $(j = 1, 2)$ を用いることが考えられよう。したがって、定常性の仮定の下では関係

$$
\begin{aligned}
& \mathbf{P}(M_t = m|\rho_{t-1} = j) \\
= \ & p_{j1}\mathbf{P}(M_{t+1} = m-1|\rho_t = 1) \\
& \quad + p_{j2}\mathbf{P}(M_{t+1} = m|\rho_t = 2)\ (j = 1, 2)
\end{aligned}
$$

を使えば，逐次的に確率 $P(M = M_0)$ を求めることができる。

次に $M$ の分布関数を利用して $n$ 時点における長期の指数収益率の分布を表現することを考えよう。$S_n$ を $n$ 時点での指数水準、初期条件を $S_0 = 1$ と仮定しよう。確率変数 $\{M = m\}$ 及び状態変数 $\{\rho_1 = i_1, \cdots, \rho_n = i_n\}$ を条件とすると、指数水準の対数変換値 $\sum_{t=1}^{n} R_t$ は $m$ 個の互いに独立な状態 1 の確率変数と $n-m$ 個の互いに独立な確率変数の和として表現される。状態変数が取りうる値 $\{M = m\}$ で条件づけた条件付確率を事象 $\{M = m\}$ の範囲でとれば 1 であるので、各局面での分布を正規分布に特定化すれば

$S_n|M \sim \mathrm{lognormal}(\mu_*(M), \sigma_*^2(M))$,

$\mu^*(M) = M\mu_1 + (n-M)\mu_2$,

$\sigma_*^2(M) = M\sigma_1^2 + (n-M)\sigma_2^2$

となる。(ここで対数正規分布 lognormal$(\mu, \sigma^2)$ とは対数をとると正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ にしたがう分布と定義する。) すなわち各局面での分布を正規分布に特定化すれば、$M$ の分布関数 $p(m)$

を用いて、

$$
\begin{aligned}
F_{S_n}(x) &= \mathbf{P}(S_n \le x) \qquad (2.19)\\
&= \sum_{m=0}^{n} \mathbf{P}(S_n \le x | M = m) p(m)\\
&= \sum_{m=0}^{n} \Phi(\frac{\log x - \mu_*(m)}{\sigma_*(m)}) p(m)
\end{aligned}
$$

となる。ここで $\Phi$ は標準正規分布の累積分布関数を表している。同様にして，$S_n$ の確率密度関数は，

$$
f_{S_n}(x) = \sum_{m=0}^{n} \phi(\frac{\log x - \mu_*(m)}{\sigma_*(m)}) \frac{1}{x} \frac{1}{\sigma_*(m)} p(m) \qquad (2.20)
$$

と書けるが、$\phi$ は標準正規分布の確率密度関数である。これらの累積密度関数，確率密度関数を使って局面転換対数正規 (RSLN) モデルと独立 (増分) 対数正規 (ILM) モデルにしたがう収益率の分布関数や確率密度関数などを推定することも出来る。長期間の収益率分布については独立増分対数正規 (ILN) モデルに比べて，局面転換対数正規 (RSLN) モデルの左の裾が厚いことが分かる。こうした裾の厚さは、エクイティリンク型保険において長期の契約におけるリスクをモデリングする際に有用であろう。しかしながら，このコメントは TSE300 の全データと TOPIX の全データ，並びに，TOPIX の 1956-1979 のデータに関して言えるものである。TOPIX の 1980-1989 のデータと TOPIX の 1990-1999 のデータに関して求めた結果は，少なくとも高ボラティリティ期間でもネガティブの平均を持つという結果になっている。

ここでは表 2 で推定したパラメーターを使い、さらに初期値 $S_0 = 100$ とした時の収益率の確率密度関数を図 3 から図 7 に与えておく。長期間の収益率分布については独立対数正規 (ILN) モデルに比べて，局面転換対数正規 (RSLN) モデルの左の裾が厚いことがみてとれる。こうした裾の厚さが、エクイティリンク型保険において長期の契約におけるリスクをモデリングする際に有用になってくる。

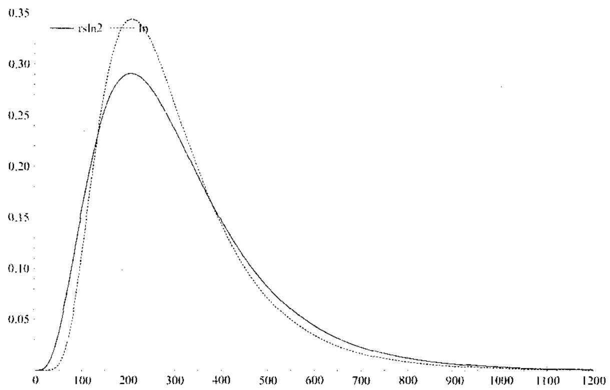


図 3: TSE300 の確率密度関数

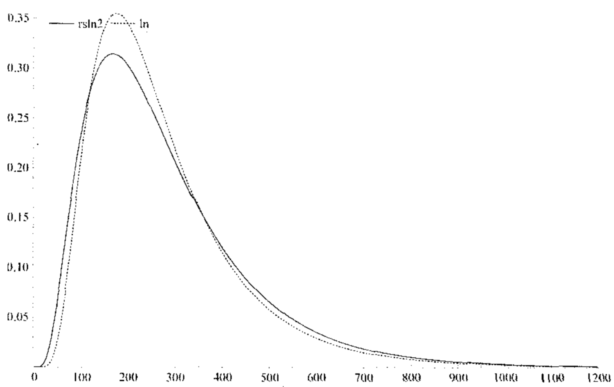


図 4: TOPIX1956-1999 の確率密度関数

次に滞在総回数の分布関数を用いれば、任意の時点における株価の積率を求めることができることに注意する。条件付対数正規分布の性質

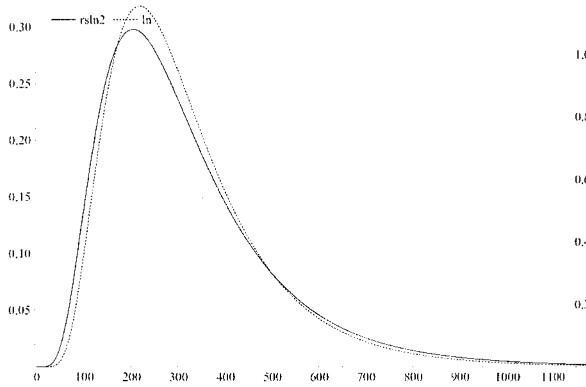


図 5: TOPIX1956-1979 の確率密度関数

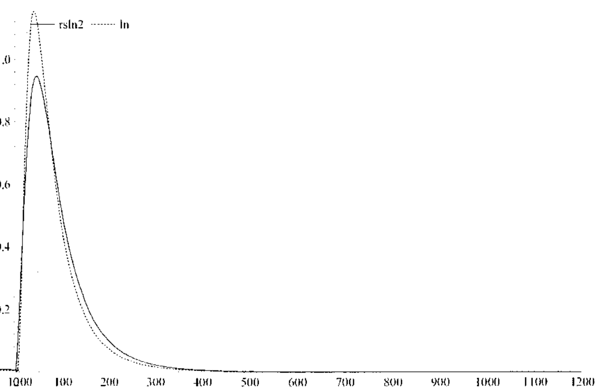


図 7: TOPIX1990-1999 の確率密度関数

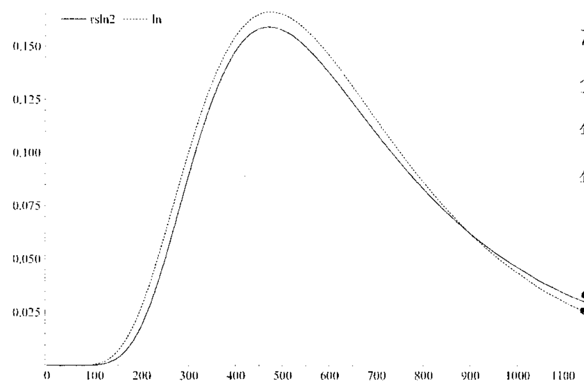


図 6: TOPIX1980-1989 の確率密度関数

を利用すると

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}[(S_n)^k] \qquad\qquad (2.21)\\
= \;& \mathbf{E}[\exp(k(M\mu_1 + (n-M)\mu_2)\\
&+\frac{k^2}{2}(M\sigma_1^2 + (n-M)\sigma_2^2))]\\
= \;& \mathbf{E}[\exp(M(k(\mu_1-\mu_2)\\
&+\frac{k^2}{2}(\sigma_1^2-\sigma_2^2))) \times \exp(kn\mu_2 + \frac{k^2}{2}n\sigma_2^2)\\
= \;& \exp(kn\mu_2 + \frac{k^2}{2}n\sigma_2^2)\\
\times \;& \sum_{m=0}^{n} \exp(m(k(\mu_1-\mu_2) + \frac{k^2}{2}(\sigma_1^2-\sigma_2^2)))p(m)
\end{aligned}
$$

となることがわかる。この (2.21) 式を用いて、局面転換 (RSLN) モデルに関して上記の 5 ケースについて表 5 に，平均，2 次，3 次，4 次のモーメント，歪度，尖度を求めた結果を与えておく。また比較の為に収益率データから計算した結果を表 6 にまとめておく。なお TOPIX は全期のデータを、TOPIX1,2,3 はそれぞれ 1956 年〜1979 年，1980 年〜1989 年，1990 年〜1999 年の期間のデータをそれぞれ意味している。

## 3 変額年金保険のリスク測定

局面転換（RS）モデルを用いたリスク評価法を考えよう。特に具体的例として局面転換（RS）モデルを用いたエクイティリンク型保険のリスク評価の例として、分離ファンドのリスク評価について考察する。分離ファンド契約の最も典型的な形式として、10 年間保険料が投資信託に投資されるという状況考え、運用などの諸費用は月々差し引かれるとする。保険の満期には契約保有者は、受け取りが支払った保険料を下回らないという保証がついた形で投資の成果を受け取る契約を想定しよう。ここでは、仮想的[5] に保険会社の満期における責任準備金（以下では

[5]なお責任準備金については実際には、オプション・プレミアムである最低保証料収入など中途の収入と支出、死亡率の動向、金利の変動と解約率や引き出し率の動向等、日本アクチュアリー会別冊 (2004) が詳しく議論しているように、具体的な商品設計に応じた様々な要因を含む分析が必要となる。こうした様々な実際的論点について指摘されたレフェリーに感謝する。

簡略準備金とよぶ）は、$G$ を満期において保証している額、$F$ を満期におけるファンドとすると、$\max[G-F, 0]$ で与えられると考える。したがって、この契約はヨーロッパ型プット・オプション (European put-options) の一種と解釈することが出来る。こうした金融契約を販売する時、その潜在的なリスクを分析するためには、特に左側の裾が厚いことを許す長期の株式収益率モデルが必要となる。すなわち、保険会社はプット・オプション契約の販売に伴い、株式運用から生じうる将来における不利な経済状況に陥る可能性をも考慮する必要がある。

1つのリスクを測定する基準としては、簡略準備金の分布のパーセント点を見ることが考えられる。これがバリュー・アット・リスク (VaR:value-at-risk) アプローチである。ここでは、株価の収益率を説明するモデルとして独立増分対数正規モデルを用いたときと局面転換（RS）モデルを用いたときのパーセント点を比較してみよう。

ここで単純化の為に保険契約の中途解約については考えないことにする。また $S_1=100$, $G=100$ を最低保証額、運用コストとして、複利で月 $h$ パーセントがファンドから差し引かれ、$S_n$ を $n$ 時点における当該資産の価格とする。ここで議論の単純化の為に、$h$ が小さく満期におけるファンドの価値を $S_n e^{-nh}$ で近似して、満期時における簡略準備金を

$$X=\max(G-S_n e^{-nh}, 0) \tag{3.1}$$

と見なそう。ここで $\zeta=\mathbf{P}(S_n e^{-nh}>G)$ とすると、もし $\alpha \leq \zeta$ であれば、簡略準備金の分布の $100\alpha$ パーセント点は $V_\alpha=0$ である。さらに $\alpha>\zeta$ となる場合には $V_\alpha$ は

$$F_{S_n}((G-V_\alpha)e^{nh})=(1-\alpha) \tag{3.2}$$

より

$$V_\alpha=G-e^{-nh}F_{S_n}^{(-1)}(1-\alpha) \tag{3.3}$$

で与えられる。ここで $F_{S_n}$ は当該資産の $n$ 時点における分布関数、$F_{S_n}^{(-1)}(t)=inf\{x|F(x)\geq t\}$ で定める。特に独立増分対数正規 (ILN) モデルの場合には標準正規分布の累積分布関数は逆関数が存在するので、$z_\alpha=\Phi^{-1}(\alpha)$ と置けば、

$$V_\alpha=G-S_0\exp[-z_\alpha\sqrt{n}\sigma+n\mu-nh] \tag{3.4}$$

である。

ここで VaR(バリュー・アット・リスク) はパーセント点であり、その点よりも左側の分布の形状は考慮しない基準になっていることに注意しよう。それに対して，近年、北米のアクチュアリー間でもで有力となっているリスク尺度 (risk measure) として、条件付裾期待値 (CTE, conditional tail expectation) がある。この統計量は、簡略準備金の値が分布の $(1-\alpha)$ の裾に落ちることを所与としたときの簡略準備金の期待値に対応する。CTE はパーセント点を越えた分布の裾をすべて利用しているからバリュー・アット・リスクよりもさらに悪化する状況をもより現実的に考慮していることになる。したがって、VaR に比べるとより保守的な基準を意味している。

ここで、連続かつ単調増加の簡略準備金の分布に対して $0\leq\alpha<1$ の範囲にある任意の母数 $\alpha$ に対する CTE は

$$CTE(\alpha)=\mathbf{E}[X|X>V_\alpha] \tag{3.5}$$

で与えられる。ここで $V_\alpha$ はバリュー・アット・リスク値である。こうした CTE の定義によれば、例えば $\alpha<\zeta$ に対しては $V_\alpha=0$ となる。このようなケースが実用的に望ましくないとす

れば、例えば$\beta' = \max \beta : V_\alpha = V_\beta$ という $\beta$ に基づき

$$CTE(\alpha) = \frac{(1-\beta')\mathbf{E}[X|X > V_\alpha] + (\beta' - \alpha)V_\alpha}{1-\alpha} \tag{3.6}$$

と定義することを、例えば Hardy (2001) は提案しているが、この CTE の定義は一種の実用的な簡便法と考えられよう。

ここで $\alpha \geq \zeta$ を仮定すると

$$\begin{aligned} & CTE(\alpha) \qquad (3.7)\\ = \ & \mathbf{E}[X|X > V_\alpha] \\ = \ & \mathbf{E}[G - S_n e^{-nh} | S_n < (G - V_\alpha)e^{nh}] \\ = \ & \frac{1}{1-\alpha}\int_0^{(G-V_\alpha)e^{nh}} (G - ye^{-nh}) f_{s_n}(y)dy \\ = \ & \frac{1}{1-\alpha}\Big[G \times F_{s_n}((G-V_\alpha)e^{nh}) \\ & - \int_0^{(G-V_\alpha)e^{nh}} ye^{-nh} f_{s_n}(y)dy\Big] \\ = \ & G - \frac{e^{-nh}}{1-\alpha}\int_0^{(G-V_\alpha)e^{nh}} y f_{s_n}(y)dy \end{aligned}$$

と表現されことに注意しよう。ここで初期値 $S_0 = 1$ かつ $S_n \sim \mathrm{lognormal}(n\mu, n\sigma^2)$ であるならば、$\alpha \geq \zeta$ に対して

$$\begin{aligned} & CTE(\alpha) \qquad (3.8)\\ = \ & G - \frac{\exp(n\mu - nh + n\sigma^2/2)}{1-\alpha} \\ & \times \Phi\Big(\frac{\log(G - V_\alpha) - n\mu + nh - n\sigma^2}{\sqrt{n}\sigma}\Big) \end{aligned}$$

となる。なお、この表現は初期値 $S_0 = 1$ を仮定しているので、より一般の初期値 $S_0$ に対しては、同様の議論により

$$\begin{aligned} & CTE(\alpha) \qquad (3.9)\\ = \ & G - \frac{\exp(n\mu - nh + \log(S_0) + n\sigma^2/2)}{1-\alpha} \\ \times \ & \Phi\Big(\frac{\log(G - V_\alpha) - \log(S_0) - n\mu + nh - n\sigma^2}{\sqrt{n}\sigma}\Big) \end{aligned}$$

で与えられる。

また、$S_n$ が局面転換対数正規 (RSLN) モデルにしたがうときには、

$S_n|M \sim \mathrm{lognormal}(\mu_*(M), \sigma_*^2(M))$,

$\mu_*(M) = M\mu_1 + (n-M)\mu_2$,

$\sigma_*^2(M) = M\sigma_1^2 + (n-M)\sigma_2^2$

となることに注意すると、$\alpha \geq \zeta$ ならば

$$\begin{aligned} & CTE(\alpha) \\ = \ & G - \frac{e^{-nh}}{1-\alpha}\sum_{m=0}^{n} p(m) \\ \times \ & (\exp(\mu_*(m) + \log(S_0) + \sigma_*^2(m)/2)) \\ \times \ & \Phi\Big(\frac{\log(G - V_\alpha) - \log(S_0) - \mu_*(m) + nh - \sigma_*^2(m)}{\sigma_*(m)}\Big) \end{aligned}$$

となる。

特に $\alpha < \zeta$ の場合には、$\beta' = \zeta$ かつ $V_\alpha = V_\zeta = 0$ であるから $CTE(\zeta) = \mathbf{E}[X|X > 0]$ となるので (3.6) の定義を採用すれば、

$$CTE(\alpha) = \frac{1-\zeta}{1-\alpha} CTE(\zeta)$$

で与えられる。

次に既に推定された5種類の母数を用いて局面転換対数正規 (RSLN) モデルによりシミュレーションを行い、バリュー・アット・リスクと CTE のリスク評価を表7にまとめておく。比較のために独立対数正規 (ILN) モデルについても表8にまとめておく。これらの表より、1980年-89年のような2つの局面の平均が正であるような場合においては、ドリフト（あるいはトレンド）部分の寄与が大きく、当然ながら事後的にはここで定義したような意味での簡略準備金の額がほとんど不要であったことが分かる。他方、1990年-1999年のような2つの局面での平均が負であるような場合においては、プット・オプションの販売から生じる簡略準備金の額が非常に大きくなることもまた分かる。

次に時間的経過に伴い、将来における簡略準備金の評価をどうすべきかについて考えてみよう。ある $j$ 期 $(0 \leq j < 120)$ の簡略準備金の額は確率密度関数

$$\begin{aligned} & f_{S_{120-j}}(x) \qquad (3.10)\\ = \ & \sum_{m=0}^{120-j} \phi\Big(\frac{\log x - \mu^*(m) - \log S_j}{\sigma^*(m)}\Big)\frac{1}{x}\frac{1}{\sigma^*(m)} p(m) \end{aligned}$$

にしたがうと考えられる。ただし、$S_{120-j}$ は残り $120-j$ 月の当該資産を表すが、$j$ 期では $S_j$

が確定することになる。ここでは、1 年後から 8 年後まで 1 年ごとに簡略準備金はどのように調整すべきであるかをシミュレーションにより考察してみる。系列 $S_{12}, S_{24}, \cdots, S_{96}$ までを 100 回乱数発生させ、簡略準備金の評価を 100 回行いその平均をとってみた。それらのシミュレーションを利用し、表 9 は TSE の計算結果、表 10 には TOPIX の計算結果をそれぞれまとめておいた。ここで year は残存年数であり、year が減ると簡略準備金の額も減る傾向にある事が観察される。収益率が独立 (増分) 対数正規 (ILN) モデルにしたがう場合には対数正規分布の性質を利用して簡単に様々な統計量が計算できるが、局面転換モデルの場合には残存期間がある程度あると、その効果は複雑となるのでシミュレーションが必要となろう。

## 4 結語

本稿では生命保険業において近年に注目されている変額年金保険とそれに関わる新しいリスク管理について、新たに分析が必要となる統計的側面を中心に検討した。ここで得られた主要な結論は次のようにまとめることができる。

第一に変額年金保険のリスク管理法には伝統的に保険数理（アクチュアリアル法）が依拠してきた古典的な大数の法則や中心極限定理が十分な役割を果たし得ないという意味で、生命保険業においてかなり新たな問題を提起していることは明らかである。

第二に北米の保険関係者を中心にこの間議論されている局面転換 (RS) モデルによるリスク管理法は、ファイナンス分野で開発されたブラック・ショウルズ・モデルに対応する離散時系列モデルである互いに独立な増分が対数正規分布にしたがうという、独立 (増分) 対数正規 (ILN) モデルを適用する時に生じる様々な実証的問題点の幾つかをとりあえず解決してくれる、という側面があるという意味で興味深い方法である。

局面転換モデルにおいては必ずしも各局面での分布を正規分布に限る必要はないが、各局面での収益率分布を正規分布とすると、収益率分布の周辺分布は混合正規分布となり、ボラティリティ変動を許容し、局面転換に関する一般的な条件の下で、弱相関構造を有する直観的に分かりやすい統計的時系列モデルと見なすことができる。

しかしながら、より大きな第三の論点として変額年金保険に関するリスク評価における局面転換モデルの利用を考えると幾つかの問題点も同時に浮上してきた。変額年金保険に関連するリスク全体に目を向けると、伝統的な生命保険で問題としている死亡率リスクというよりも、大きな割合で将来の株価水準といったマクロ経済変数の動向により直接的に依存している。ところが、例えばこの間の北米のマクロ経済動向と日本のマクロ経済動向には共通点はあるものの、異なる大きな変動も少なくない。変額年金の場合には、場合によっては数十年の単位での長期多期間におよぶ保険リスク評価をある程度まで行う必要がある。したがって、当然ではあるが長期の収益率に対し適当に期間を設定して局面転換 (RS) モデルを適用してリスク評価を行うことから問題が発生する可能性があることが確認された。

ここでは局面転換 (RS) モデルは統計的時系列分析 (statistical time series analysis) においては隠れマルコフ (Hidden Markov) モデルと呼ばれているタイプの時系列モデルであることを指摘しておく。この種の離散時系列モデルは時間的従属性を持つ同時確率分布が非正規性や非線型性をも表現しうる便利な統計学的手段を提供

している。ただし、非正規性と非線型性を満足する離散時系列モデルは既にこれまで数多くの研究がなされている。例えば北米のアクチュアリーの議論では確率的ボラティリティ(stochastic volatility)変動の時系列モデルや(意味はかなり異なるものの)安定分布(stable distribution)モデル[6]なども言及されている。あるいは、経済的考察から開発された非線形時系列モデルとしてKunitomo and Sato(1999)は同時転換自己回帰モデル(SSAR)を提案している。また、よりノン・パラメトリック統計学的方法に基づく多期間リスク管理法については例えば国友・一場(2004)が検討している。どのような統計的時系列モデルを用いたリスク管理が適切なのか、実務面での応用をも含めて今後もさらに検討していく必要があろう。

最後に本稿では変額年金のリスク管理問題の中でも特に統計学的にも議論が必要となった幾つかの問題に絞った限定的な分析を行ったことに注意しておく。当然ではあるが、多くの残された重要な検討課題がある。例えば変額年金の運用資産間の依存性を無視することができないが、近年では様々な新しい統計学的分析方法[7]が提案されている。また、現実的方法として採用されることがあるボラティリティ母数を適当に調整するという、リスク調整によるリスク管理法(アクチュアリー会別冊(2004)を参照)の妥当性についてもさらなる検討が必要であろう。また、変額年金の実際的なリスク管理では死亡率の動向、金利の変動と解約率や引き出し率の動向など契約者の選択動向の分析も重要である。こうした変額年金問題を巡る様々な側面についても、今後、さらに検討することが望まれよう。

[6]安定分布やより一般的な無限分解可能分布(infinitely divisible distributions)について詳しいことは、佐藤(1990)が参考となろう。

[7]例えば資産運用でよく利用されている相関係数は正規分布の仮定をはずすと従属性に関するもっともらしい指標とは限らない。確率変数間の従属性をより一般に表現するコピュラ関数についてはNelson (1999)を参照されたい。

## 引用文献

[1] Bickel, P.J, Ritov, Y,and Ryden, T. (1998), "Asymptotic Normality of the Maximum Likelihood for General Hidden Markov Models," *Annals of Statistics*, 26-4, 1614-1635.

[2] Hamilton, J.D. (1989), "A New Approach to the Economic Analysis of Non-stationary Time Seris," *Econometrica*, 57, 357-84.

[3] Hamilton, J.D. (1990), "Analysis of Time Series subject to Changes in Regime," *Journal of Econometrics*, 45, 39-70.

[4] Hamilton, J.D. (1994), *Time Series Analysis*, Priceton University Press.

[5] Hardy, M.R. (2001), "A Regime-Switching Model of Long-Term Stock Returns," *North American Acturial Journal*, 5-2, 42-53.

[6] Hardy, M.R. (2003), *Investment Guarantees*, John Wiley & Sons Inc.

[7] Kitagawa, G. (1987), "Non-Gaussian State Space Modelling of Non-stationary Time Series," *Journal of the American Statistical Association*, 82 (with Discussions), 1032-1063.

[8] 国友直人・高橋明彦 (2003), 「数理ファイナンスの基礎：マリアバン解析と漸近展開の応用」, 東洋経済新報社。

[9] 国友直人・一場知之 (2004), 「多期間リスク管理法と変額年金保険」, Discussion Paper CIRJE-J-113, Graduate School of Economics, University of Tokyo
(http://www.e.u-tokyo.ac.jp/cirje/よりダウンロード可能), 日本統計学会(和文)誌（近刊)。

[10] Kunitomo, N. and Sato, S. (1999), "Stationary and Non-stationary Simultaneous Switching Autoregressive Models with an Application

to Financial Time Series," *Japanese Economic Review*, 50-2, 161-190, Blackwell.

[11] Leroux, B. (1982), "Maximum-likelihood Estimation for Hidden Markov Models," *Stochastic Processes and their Applications*, 40, 127-143.

[12] 田中周二・松山直樹 (2004), 「統計学とアクチュアリーの現代的課題」, 日本統計学会 (和文) 誌, Vol.34-1, 41-55.

[13] 日本アクチュアリー会別冊 (2004), 「変額年金等の最低保証リスクに係る責任準備金の積立等について」.

[14] Nelson, R. (1999), *An Introduction to Copulas*, Springer.

[15] 佐藤健一 (1990), 「加法過程」, 紀伊國屋書店。

| | TSE300 | TOPIX | TOPIX1 | TOPIX2 | TOPIX3 |
|---|---|---|---|---|---|
| 平均 | 3.1056 | 2.6331 | 3.2296 | 7.1764 | 0.90306 |
| 2 次モーメント | 12.853 | 8.3228 | 14.181 | 69.183 | 1.3333 |
| 3 次モーメント | 68.875 | 30.420 | 84.092 | 955.40 | 3.0986 |
| 4 次モーメント | 468.95 | 128.66 | 669.59 | 20376. | 11.160 |
| 歪度 | 1.5727 | 0.72517 | 1.9362 | 2.7587 | 2.5754 |
| 尖度 | 7.5859 | 5.3237 | 10.262 | 20.377 | 16.770 |

表 5: RSLN モデルの積率・歪度・尖度

| | TSE300 | TOPIX | TOPIX1 | TOPIX2 | TOPIX3 |
|---|---|---|---|---|---|
| 平均 | 2.9993 | 2.7612 | 3.1991 | 6.4926 | 0.80748 |
| 2 次モーメント | 11.479 | 10.363 | 13.228 | 51.858 | 1.0826 |
| 3 次モーメント | 56.059 | 52.869 | 70.704 | 509.54 | 2.4099 |
| 4 次モーメント | 349.34 | 366.60 | 488.48 | 6159.1 | 8.9074 |
| 歪度 | 1.7212 | 2.0134 | 1.7810 | 1.5498 | 2.9745 |
| 尖度 | 8.6916 | 10.979 | 9.1229 | 7.5538 | 22.025 |

表 6: 収益率より推定された積率・歪度・尖度

| | TSE300 | TOPIX | TOPIX1 | TOPIX2 | TOPIX3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\zeta$ | 0.8724 | 0.8302 | 0.9135 | 0.99968 | 0.1805 |
| $V_{0.90}$ | 8.8053 | 19.473 | 0 | 0 | 81.035 |
| $V_{0.95}$ | 28.215 | 37.030 | 15.028 | 0 | 86.443 |
| $V_{0.975}$ | 42.216 | 49.254 | 29.252 | 0 | 90.073 |
| $CTE(0.90)$ | 31.558 | 39.669 | 18.784 | 0.0366 | 88.524 |
| $CTE(0.95)$ | 44.837 | 51.547 | 32.174 | 0.0731 | 91.258 |
| $CTE(0.975)$ | 55.008 | 60.114 | 42.562 | 0.1463 | 93.322 |

表 7: RSLN モデルによるリスク評価

| | TSE300 | TOPIX | TOPIX1 | TOPIX2 | TOPIX3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\zeta$ | 0.9046 | 0.8327 | 0.9390 | 0.99864 | 0.1364 |
| $V_{0.90}$ | 0 | 16.213 | 0 | 0 | 81.702 |
| $V_{0.90}$ | 15.621 | 31.622 | 4.8049 | 0 | 85.850 |
| $V_{0.90}$ | 27.992 | 42.661 | 18.806 | 0 | 88.740 |
| $CTE(0.90)$ | 18.835 | 34.317 | 11.256 | 0.1650 | 86.620 |
| $CTE(0.95)$ | 30.811 | 45.023 | 21.754 | 0.3301 | 89.290 |
| $CTE(0.975)$ | 39.869 | 53.026 | 32.178 | 0.6601 | 91.397 |

表 8: ILN モデルによるリスク評価

表 9: TSE の動学的リスク評価

| year | VaR90 | VaR95 | VaR97.5 | CTE90 | CTE95 | CTE97.5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 8.8053 | 28.215 | 42.216 | 31.558 | 44.837 | 55.008 |
| 9 | 8.0621 | 22.197 | 36.101 | 29.422 | 39.673 | 49.742 |
| 8 | 8.3658 | 18.841 | 31.260 | 28.835 | 37.775 | 45.937 |
| 7 | 7.7355 | 16.155 | 26.694 | 27.763 | 35.888 | 41.939 |
| 6 | 8.1875 | 14.937 | 23.709 | 27.951 | 35.890 | 40.669 |
| 5 | 8.0847 | 13.944 | 20.849 | 27.059 | 33.814 | 39.786 |
| 4 | 7.7826 | 12.688 | 18.839 | 26.978 | 32.046 | 35.930 |
| 3 | 7.6623 | 12.149 | 16.871 | 23.647 | 25.464 | 31.862 |
| 2 | 6.9010 | 9.6155 | 12.873 | 20.322 | 22.788 | 27.921 |

表 10: TOPIX の動学的リスク評価

| year | VaR90 | VaR95 | VaR97.5 | CTE90 | CTE95 | CTE97.5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 19.473 | 37.030 | 49.254 | 39.669 | 51.547 | 60.114 |
| 9 | 14.487 | 30.632 | 43.208 | 35.407 | 46.047 | 54.988 |
| 8 | 13.289 | 25.519 | 37.810 | 33.358 | 42.507 | 50.434 |
| 7 | 11.378 | 21.602 | 32.523 | 32.586 | 39.269 | 46.073 |
| 6 | 10.712 | 19.244 | 28.370 | 32.734 | 38.389 | 43.498 |
| 5 | 9.0013 | 15.990 | 23.811 | 29.286 | 32.484 | 39.869 |
| 4 | 10.066 | 15.339 | 21.231 | 27.600 | 32.949 | 36.413 |
| 3 | 9.2178 | 13.307 | 17.371 | 25.421 | 29.886 | 34.586 |
| 2 | 8.6963 | 11.173 | 13.855 | 19.466 | 25.232 | 26.820 |

# Risk Management Methods of Equity-Linked Insurance and Practical Problems

Gota Akiyama

Mitsui Asset Trust and Banking Company, Limited
3-23-1, Shiba, Minato-ku, Tokyo 105-8574

Naoto Kunitomo

Graduate School of Economics, University of Tokyo
7-3-1, Hongo, Bunkyo-ku, Tokyo 113-0033

## Abstract

Recently the various types of the equity-linked insurance have been introduced and actively traded in Japanese financial markets. We investigate the basic problems of the actuarial risk management methods for those products based on the Markovian regime-switching time series models, which was originally proposed by Hamilton (1989). We argue that they should be carefully used in Japan mainly because the macro-economic performance of Japan in the past decades have been quite different from the macro-economies of Canada and the U.S..