研究論文

Cramér-Lundberg モデルにおける生命保険会社の公平性をふまえた契約者配当政策

下山法之*

2020 年 9 月 24 日投稿
2021 年 3 月 5 日受理

概要

本研究の目的は危険理論における配当モデルを用いて生命保険会社の契約者配当政策について論じることである．危険理論における最適配当問題は，最初に De Finetti によって離散時間の二項モデルを用いて議論され，以降，広く研究対象とされてきた．最適配当は基本的には累積配当現価などを最大化するよう決定される．しかしながら，これら先行研究の多くは株主配当の観点から論じられたものであり，契約者配当を考えるうえでは保険契約者間の公平性の確保が重要な視点となる．保険数理的に言えば，契約群団間の保険引受リスク水準が同一（リスク同質）であれば，配当差引後の実質的な保険料は同一であるべきということである．この要請に従えば，有配当タイプの保険契約の配当差引後の実質的な保険料は，この契約とリスク同質な無配当タイプの保険契約の保険料と同一であるべきである．無配当タイプの保険契約の保険料が適切な保険料算出原理に従って導出される限り，契約者配当政策は配当差引後の実質的な保険料を通じた“広義の保険料算出原理”に過ぎない．本研究では Cramér-Lundberg モデルに基づく配当モデルについて，契約者間の公平性の観点を取り込むことで，契約者配当の水準が決定されることを示す．

キーワード：危険理論, Cramér-Lundberg モデル，配当モデル，契約者配当

*富国生命保険相互会社主計部数理グループ　〒100-0011 東京都千代田区内幸町 1-3-1
E-mail:noriyuki.shimoyama@fi.fukoku-life.co.jp

1 研究の目的と先行研究

1.1 危険理論における典型的な基本モデル

危険理論の基本的な考え方は，時刻 0 で一定量のサープラス（初期投資）u を準備し，任意の時刻 t に対し期間 $[0,\ t]$ に発生する一定の保険料収入 ct および総保険金支払額 S_t からサープラス U_t を確率変数として定義し，保険会社の破産する（サープラスが負値となる）確率等を求めることである．時刻 t までの保険金支払の発生件数 N_t や 1 件当たりの保険金支払額 X を確率変数とし，各確率変数の従う確率分布を設定することで，決定論的手法では得られない破産確率 $\psi(u)$ を求めることが可能となる；

$$\psi(u) = 1 - \Pr\left(\min_{0\le t\le\infty} U_t > 0\right)$$

$$= \Pr(T < \infty)\ ,\quad \cdot\cdot\cdot (1-1)$$

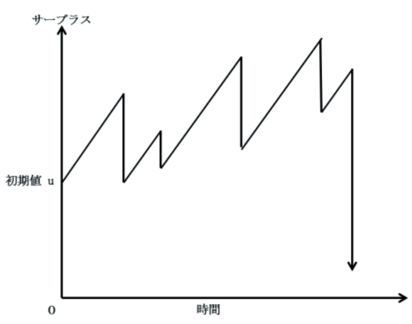
$$U_t = u + ct - S_t\ ,\qquad \cdot\cdot\cdot (1-2)$$

$$S_t = X_1 + X_2 + \cdots + X_{N_t}\ ,$$

$$T = \ \inf\{t \mid U_t \le 0\}\qquad \cdot\cdot\cdot (1-3)$$

ここでモデルは時間について連続型とし，T は破産時間の確率変数である．安全割増率を θ，1 件当たりの平均保険金額（の逆数）を α，単位期間（年間）当たりの支払件数を λ とすれば，単位期間（年間）に領収される保険料 c は，$c = \lambda(1+\theta)/\alpha$ と表せる．また，1 件当たりの支払金額 X は互いに独立とする．このときのサープラス U_t のサンプルパスは図 1 のようになる．

図 1．基本モデル



1 件当たりの保険金額が指数分布[1] $F(x) = 1 - e^{-\alpha x}$，単期間当たりの支払件数がポアソン分布に従う古典的な Cramér-Lundberg モデル（複合ポアソン過程）を仮定すると，1 回目の請求による保険金支払とその発生時刻を考えることで，

$$\psi(u) =$$

$$\int_0^\infty dt\ \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} dx\ \alpha e^{-\alpha x}\ \psi(u+ct-x)$$

$$+ \int_0^\infty dt\ \lambda e^{-\lambda t} \int_{u+ct}^\infty dx\ \ \alpha e^{-\alpha x}$$

$$\cdot\cdot\cdot (1-4)$$

を得る.これにより，

境界条件 $\left.\frac{\partial}{\partial u}\psi(u)\right|_{u=0} = \frac{\lambda}{c}\psi(0) - \frac{\lambda}{c}$

および $\lim_{u\to\infty}\psi(u) = 0$ を用いて，無限期間における破産確率として，（$1-1$）式は陽な表現として，以下の式を得る；

$$\psi(u) = \frac{1}{1+\theta} e^{-\frac{\theta}{1+\theta}\alpha u}\quad \cdot\cdot\cdot (1-5)$$

1.2 先行研究における配当モデルと最適配当戦略

企業の安定性を評価する基準が無限期間における破産確率の最小化であるならば，それは企業が剰余を無制限に成長させなければならないことを意味する．これに対し De Finetti[1957]は，『企業の主な目的は株主へ配当を支払うことである』と指摘し，離散時間の二項モデルを用いた配当モデルを提案（Bühlman[1970]§6.4.5 に配当モデルの要約がある）した．以降，これを契機に危険理論の配当問題として広く研究対象とされてきた．配当は会社の配当戦略に応じて分配される．例えば，ある配当戦略を L とし，どのタイミングでどの程度の配当を支払うか決定する．その配当戦略に従い期間 $[0,\ t]$ に分配される累積配当額を D_t^L とすると，サープラスは（$1-2$）式から次のように修正した形式で定義される；

[1] 指数分布やアーラン分布は危険理論において破産確率などの解析解（陽な表現）が得られることが知られている．

$$Y_t = U_t - D_t^L \quad ・・・(1-6)$$

上記の修正したサープラスにおける破産時間の確率変数を改めてTとおくと，破産時間の確率変数は（1－3）式と同様に次のように定義される；

$$T = \inf\{t \mid Y_t \leq 0\} \quad ・・・(1-7)$$

また，破産までの累積配当現価は

$$D^L = \int_0^T e^{-\delta t} dD_t^L \quad ・・・(1-8)$$

となる．ここでδは瞬間利子率である．従って，期待累積配当現価は

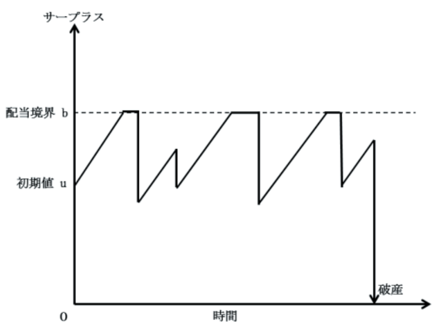
$$V(u;L) = E[D^L] \quad ・・・(1-9)$$

となり，これは価値関数(value function)と呼ばれる．会社は配当戦略を選択する必要があり，株式会社であれば株主のために破産までの累積配当現価を最大化することが重要となることから，最適配当戦略と呼ばれるものは，一般に価値関数の最大化として定義される；

$$V(u) = \sup_L V(u;L) \quad ・・・(1-10)$$

ところで，配当戦略のもと価値関数を議論するには，サープラスが従う確率過程の設定および具体的な配当戦略が必要となる．確率過程については典型的な基本モデルとして挙げた Cramér-Lundberg モデル（複合ポアソン過程）が広く研究対象とされており，その中で配当戦略Lとして，バリア戦略や閾値戦略，線形バリア戦略，非線形バリア戦略などが考案され分析されてきた．

図２.配当モデル（バリア戦略の場合）



また，複合ポアソン過程の特徴である保険金の支払時間間隔が指数分布に従う仮定をより一般化した Sparre-Andersen モデルの中で配当戦略を論じた研究やウィーナー過程（ブラウン運動）による拡散項を持つモデルの中で配当戦略を論じた研究もある．Avanzi[2009]ではサープラスが従う確率過程や様々な配当戦略について幅広く紹介がなされており参照されたい．価値関数そのものをより現実的な形式にした研究もあり，Borch[1967]は期待累積配当額を最大化するという考え方は簡潔であり理解し易い一方，保険会社の事業継続を十分に考慮していない等を指摘し，（1－10）式に対して破産時刻 T がある時刻T_0 以上となる制約のもとでの代替式

$$V(u) = \sup_L \{E[D^L] \mid E[T] \geq T_0\} \quad ・・・(1-11)$$

などを提案している．また Hernández[2015] は

$$V(u) = \sup_L \left\{ E\left[D^L + \Lambda \int_0^T ds\, e^{-\delta s} \right] - \Lambda K_{T_0} \right\} \quad ・・・(1-12)$$

とし，ラグランジュ未定乗数法から期待累積配当額と破産時刻を同時に制御する価値関数を提案している．

1.3 本研究の目的

本研究の目的は危険理論における配当モデルを用いて生命保険会社の契約者配当政策について論ずることである．1.2節で述べた先行研究の最適配当戦略については，基本的には株主配当の観点から論じられており，その最適配当戦略の考え方は累積配当現価の最大化である.一方，契約者配当では，契約者間の公平性が重要な視点となる．保険会社が保有する保険契約には，保障内容や配当タイプなどが異なることにより，保険引受リスクや保険料の水準が異なるものが多数混在する.契約者間の公平性を確保するためには，個々の契約群団の剰余金への貢献度（収支残）に応じて配当金を支払う必要がある[2].保険数理的に言えば，契約群団間の保険引受リスク水準

[2]契約者配当については日本の保険業法において公正かつ衡平な分配（第55条の２および第114条）を規定しており，生命保険会社の保険計理人の実務基準においても契約者配当が公正かつ衡平であるための要件（個別契約の貢献に応じていることや保険契約者が期待するところを考慮すること等）を定めている．

が同一（リスク同質）であれば，配当差引後の実質的な保険料は同一であるべきということである．この要請に従えば，有配当タイプの保険契約の配当差引後の実質的な保険料は，この契約とリスク同質な無配当タイプの保険契約の保険料と同一であるべきである．無配当タイプの保険契約の保険料が適切な保険料算出原理（premium calculation principle）に従って導出される限り，契約者配当政策は配当差引後の実質的な保険料を通じた“広義の保険料算出原理”に過ぎない．以上を整理すると，本研究の最大の主張は，従来の配当モデルにおける最適配当境界の議論では“累積配当現価（の期待値）を最大にするよう配当境界を定める”のに対し，本研究では“配当差引後の実質的な保険料を求め，これが有配当タイプと無配当タイプにおいて同等となるよう配当境界を定める”という点にある．契約者間の公平性をふまえた契約者配当政策については，株主配当を考えるうえでは生じない視点であることから，本研究は先行研究における最適配当戦略とは一線を画すものである．

さらに公平性の条件の要請により決定された配当境界を用いて健全性指標としての破産確率（はじめてサープラスが負値となる確率）を計算することで，それが保険会社の許容する水準であるか否か確認することが可能となる．現在の日本の保険業法における生命保険会社の契約者配当については，公正かつ衡平な剰余の分配を規定し利源別配当方式やアセットシェア方式などの計算方法は定められているものの，その水準決定については各生命保険会社の判断に委ねられている．発生した剰余のうち，どれだけを契約者の配当財源に充て，どれだけを健全性確保のための内部留保の充実に充てるのかは難しい問題であり，本配当モデルは確率論的な視点から健全性指標として破産確率を確認することが可能であり，生命保険会社の契約者配当政策の実務においても有用と考えられる．

本研究の主張を実行するため，2 章において契約者間の公平性をふまえた契約者配当政策について数式を交えて論じていく．1.2 節で述べたとおり配当戦略を議論するには，サープラスが従う確率過程および具体的な配当戦略が必要となることから本研究では典型的な配当モデルである Cramér-Lundberg モデル（複合ポアソン過程）に基づくバリア配当戦略に従うものとするが，確率過程の前提や配当戦略が異なっても有無配当タイプ間の実質的な保険料を同等とするという議論の本質は変わらない．まず 2.1 節では先行研究における Cramér-Lundberg モデル（複合ポアソン過程）に基づくバリア配当戦略についてレビューを行う． 次に 2.2 節および 2.3 節では，本モデルおよび配当戦略について，本研究の対象となる保険契約郡団および生命保険商品の特徴を捉えたものとするため，2 つの修正を行う．1 つ目の修正は，サープラスが負値となった後も配当を支払い続ける無限期間の累積配当現価を導出することであり，これを 2.2 節で行う．2 つ目の修正は，有限期間における配当モデルの構築であり，これを 2.3 節で行い，さらに配当差引後の実質的な保険料を定義するために必要となる単位期間当たりの累積配当額を導出する．2.4 節において契約者間の公平性をふまえた契約者配当の一般論を述べ，2.5 節でその具体的な数値を示す．

2 生命保険会社の契約者配当への応用

2.1 先行研究における典型的な配当モデル

はじめに，先行研究における典型的な配当モデルとして Cramér-Lundberg モデルおけるバリア配当戦略をレビュー（Bühlman[1970]や Dickson[2005]）しておく．本モデルは最適配当問題へのアプローチとして前提が簡単かつ明瞭であるだけでなく，保険金支払額が指数分布に従う場合には価値関数の解析解が存在する（陽な表現を持つ）ことから，複雑な数値シミュレーションに頼ることなく分析や評価ができるという利点がある．

本配当モデルは，ある配当境界 b （必要準備金水準）を設定し，サープラス U_t がこれを超えると，保険料収入の全額を次の保険金支払が発生するまで配当金として支払い続け，破産（サープラスがはじめて負値となる）した時点で以降，配当金の支払いを停止するというものである．配当境界の水準が低いほど破産確率が上昇し配当金の支払いが停止する可能性

も高くなることから，累積配当現価は小さくなる．一方，配当境界の水準が高すぎてもサープラスが配当境界に達するまで時間を要することから，累積配当現価は小さくなる．累積配当現価が最大となる配当境界の水準はどこか，これがいわゆる最適配当問題である． 配当金モデルにおける累積配当現価 $V(u,b)$ については，基本モデルと同様に，１回目の請求による保険金支払とその発生時刻を考えることで

$$V(u,b) = \int_0^{\tau} dt\, \lambda e^{-(\lambda+\delta)t} \int_0^{u+ct} dx\, \alpha e^{-\alpha x}\, V(u+ct-x,b) + \int_{\tau}^{\infty} dt\, \lambda e^{-(\lambda+\delta)t} \left[c\, \bar{s}_{\overline{t-\tau|}} + \int_0^{b} dx\, \alpha e^{-\alpha x}\, V(b-x,b) \right] \quad \cdot\cdot\cdot (2-1)$$

を得る[3]．ここで τ は時刻ゼロから保険金支払が発生することなく配当境界 b に到達するまでにかかる時間であり， $\tau = (b-u)/c$ で与えられる．また $\bar{s}_{\overline{t|}} = \left(e^{\delta t}-1\right)/\delta$ である．(2－1) 式より微分積分方程式

$$\frac{\partial}{\partial u}V(u,b) = \frac{\lambda+\delta}{c}V(u,b) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u dx\, \alpha e^{-\alpha x} V(u-x) \quad \cdot\cdot\cdot (2-2)$$

が得られ，境界条件 $\left.\frac{\partial}{\partial u}V(u,b)\right|_{u=b} = 1$ を用いて，

$$\mathrm{V}(u,b) = \frac{h(u)}{h'(b)},$$
$$h(u) = (\alpha+\rho)e^{\rho u} - (\alpha-R)e^{-Ru},$$
$$h'(b) = \rho(\alpha+\rho)e^{\rho b} + R(\alpha-R)e^{-Rb} \quad \cdot\cdot\cdot (2-3)$$

を得る． ここで，$\rho\,(>0)$ および $R\,(>0)$ はパラメータθ，α，δ，λ によって決まる量

$$\rho = \frac{-\lambda\theta + \delta + \sqrt{(\lambda\theta-\delta)^2 + 4\lambda(1+\theta)\delta}}{2\lambda(1+\theta)}\alpha,$$

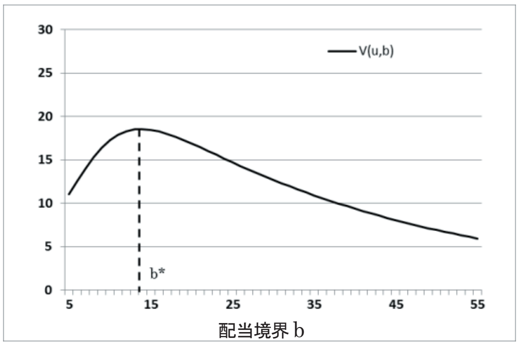
$$R = \frac{\lambda\theta - \delta + \sqrt{(\lambda\theta-\delta)^2 + 4\lambda(1+\theta)\delta}}{2\lambda(1+\theta)}\alpha$$

である．

Bühlman [1970] では $\frac{\partial V(u,b)}{\partial b} = 0$ を解くことで累積配当現価 $V(u,b)$を最大化させる配当境界 $b = b^*$ が決定できることを明示的に示した（図３）；

$$b^* = \frac{1}{\rho+R} log\left[\frac{(\alpha-R)R^2}{(\alpha+\rho)\rho^2}\right] \quad \cdot\cdot\cdot (2-4)$$

図３．累積配当現価の数値例



初期サープラス 5，安全割増率 30%，年間平均発生件数 1 件，利子率 1%

Dikson [2004] では，累積配当現価 $V(u,b)$から破産時の赤字額（の現価）を控除した量を定義し，これが最大値となるよう配当境界$b = b^*$を決定すべきことを提案している．

2.2 破産のない場合の配当モデル

株主配当の観点から論じられた先行研究の配当モデルは保険会社全体のサープラスを取り扱う，いわゆる会社モデルであるのに対し，本研究では契約者間の公平性が論点となることから，サープラスは契約年度が同一かつリスク同質な保険契約群団単位を扱う前提であることに留意が必要である． 一般的な会社モデルでは，一度でもサープラスが負値となると破産となり，それ以後について配当金は支払われない．しかしながら契約年度の同一な契約群団単位の場合，保険契約初期などにおいてサープラスは小さいことから負値となる可能性も高い． 生命保険会社の実務においては，仮にサープラスが負値となっ

3 １件当たりの保険金額について，ここでは基本モデルと同様に指数分布に従うものとした．

た場合には，他の保険種類や世代の異なる契約群団から一時的に借入を行うのが通常である．従って本研究においては，サープラスが負値となっても，その後サープラスが正値となり，配当境界 b を超えれば，再び配当が支払われるモデルを考える．但し，本来は保険契約群団の中でセルフサポートできることが望ましいことから，配当境界の決定段階においては破産確率を考慮する必要があることを付け加えておく．これについては 2.5 節の数値例にて再度述べる．

このような考慮を含めた負値のサープラスの許容や破産の定義の変更については，配当金支払いのない基本モデルで既に先行研究がある．Egidio dos Reis[1993]では，サープラスが負値となった後もサープラスを継続させる前提とし，サープラスが負値になる時刻から再び正値に戻る時刻までの赤字時間の積率母関数を導出した．また Gerber[1971]では，サープラスが負値となった場合，保険会社は特定の借入利率で利息を支払うことで破産を回避するモデルを設定し，この借入利息を負担できなくなった状態を絶対破産（absolute ruin）と定義し，保険ビジネスの停止とすることを提案している．

サープラスが配当境界 b を超えると支払われる累積配当現価は，１回目の保険金支払とその発生時刻を考えることで

$$W(u,b) = \int_0^\tau dt\,\lambda e^{-(\lambda+\delta)t} \int_0^\infty dx\, e^{-x}\ W(u+ct-x,b) + \int_\tau^\infty dt\,\lambda e^{-(\lambda+\delta)t}\left[c\,\bar{s}_{\overline{t-\tau|}} + \int_0^\infty dx\, e^{-x}\ W(b-x,b)\right] \quad \cdots (2-5)$$

を得る[4]．（$2-1$）式との相違は１件当たりの保険金支払額 X の範囲が $[0,\infty]$ となっていることである．初期サープラス u が配当境界 b に等しい場合，

$$W(b,b) = \int_0^\infty dt\,\lambda e^{-(\lambda+\delta)t}\left[c\,\bar{s}_{\overline{t|}} + \int_0^\infty dx\, e^{-x}\ W(b-x,b)\right] \quad \cdots (2-6)$$

となる．$(2-6)$ 式を用いて，

$$W(u,b) = \int_0^\tau dt\,\lambda e^{-(\lambda+\delta)t} \int_0^\infty dx\, e^{-x}\ W(u+ct-x,b) + e^{-(\lambda+\delta)\tau}\ W(b,b) \quad \cdots (2-7)$$

を得る．従って，

$$\frac{\partial}{\partial u}W(u,b) = \frac{\lambda+\delta}{c}W(u,b) - \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty dx\, e^{-x}\ W(u-x,b) \quad \cdots (2-8)$$

となり，$(2-8)$ 式に $u=b$ を代入すると，境界条件として以下を得る；

$$\left.\frac{\partial}{\partial u}W(u,b)\right|_{u=b} = 1 \quad \cdots (2-9)$$

$(2-8)$ 式より，

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2}W(u,b) + \left(1-\frac{\lambda+\delta}{c}\right)\frac{\partial}{\partial u}W(u,b) - \frac{\delta}{c}W(u,b) = 0 \quad \cdots (2-10)$$

となることから，一般解

$$W(u,b) = \kappa_1 e^{+\rho u} + \kappa_2\, e^{-Ru} \quad \cdots (2-11)$$

を得る．境界条件 $\lim_{u\to-\infty} W(u,b) = 0$ より，$\kappa_2 = 0$ となり，最終的に，累積配当現価は

$$W(u,b) = \frac{1}{\rho}\exp[-\rho(b-u)],$$

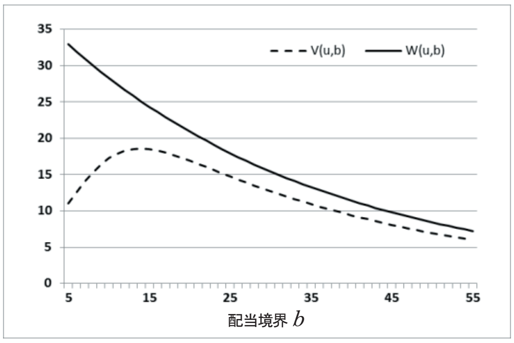
$$\rho = \frac{-\lambda\theta+\delta+\sqrt{(\lambda\theta-\delta)^2+4\lambda(1+\theta)\delta}}{2\lambda(1+\theta)} \quad \cdots (2-12)$$

となる．$(2-3)$ 式の累積配当現価 $V(u,b)$ との比較において，$W(u,b)$ は，十分なサープラスが確保できていない経過の浅い期間にサープラスが負値となっても配当支払いが継続されることから，配当境界 b が低いほど累積配当額の大きくなることが特徴である（図４）．

---

[4] 本節以降，簡略化のため $\alpha = 1$ として議論を進める．金額の単位を持つパラメータは u, b および $1/\alpha$ のみであるため，無次元量である場合には $u \to \alpha u$ と読み替えることで，適宜 α を表示させることは可能である．

図４．累積配当現価の数値例



初期サープラス 5，安全割増率 30%，年間平均発生件数 1 件，利子率 1%

2.3 単位期間当たりの累積配当額

これまで述べてきた典型的な基本モデルおよび配当モデルはすべて無限期間（infinite-horizon）を前提としている．有配当タイプの保険契約における配当差引後の実質的な保険料を無配当タイプの保険料と結びつけるためには，単位期間当たりの累積配当額を定義する必要がある．本節ではまず有限期間[5]（finite-horizon）における累積配当額を定義し，それを保険期間で除することで単位期間当たりの累積配当額を導出するステップをとる．その準備として，まず累積配当現価 $W(u,b)$について，ある保険金支払の発生からその次の保険金支払の発生までの配当額の総和として表すことを考える．n回目の保険金発生時刻は，ポアソン過程の性質上，平均発生時刻をn/λとするガンマ分布に従うことから，保険金の支払間隔ごとに累積配当額を分割することで，一定時間内の累積配当額を導出できるというのがその要諦である．よって，累積配当額を

$$W(u,b) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k(u,b) \quad ・・・(2-13)$$

と表す．例えば，$w_k(u,b)$は$k-1$回目の請求による保険金支払の発生後，k回目の保険金支払の発生直前までに支払われた配当額の現価を表す．1回目の保険金支払が発生するまでに支払われる配当額の現価 $w_1(u,b)$ は，

$$w_1(u,b) = \int_\tau^\infty dt\ \lambda e^{-(\lambda+\delta)t}\ c\bar{s}_{\overline{t-\tau|}}$$

$$= \frac{1+\theta}{1+\delta/\lambda}\ \mathrm{e}^{-\beta(b-u)}$$

$$・・・(2-14)$$

となる．ここで$\beta = \frac{1+\delta/\lambda}{1+\theta}$ である．1 回目の保険金支払の発生から 2 回目の支払発生直前までに支払われる配当額の現価 $w_2(u,b)$ は，

$$w_2(u,b) =$$

$$\int_0^\tau dt\ \lambda e^{-(\lambda+\delta)t} \int_0^\infty dx\ e^{-x}\ w_1(u+ct-x,b)$$

$$+\int_\tau^\infty dt\ \lambda e^{-(\lambda+\delta)t} \int_0^\infty dx\ e^{-x}\ w_1(b-x,b)$$

$$= \frac{1+\theta}{(1+\delta/\lambda)^2}\ \mathrm{e}^{-\beta(b-u)} \times [q(b-u)+p]$$

$$・・・(2-15)$$

となる. ここで,

$$q = \frac{1+\delta/\lambda}{2+\theta+\delta/\lambda}, \quad p = \frac{1+\theta}{2+\theta+\delta/\lambda}, \quad q+p=1$$

である. 一般に，$n-1$回目の保険金支払発生後，n回目の保険金支払発生直前までに支払われる配当額の現価は

$$w_n(u,b) =$$

$$\int_0^\tau dt\ \lambda e^{-(\lambda+\delta)t} \int_0^\infty dx\ e^{-x}\ w_{n-1}(u+ct-x,b)$$

$$+\int_\tau^\infty dt\ \lambda e^{-(\lambda+\delta)t} \int_0^\infty dx\ e^{-x}\ w_{n-1}(b-x,b)$$

$$・・・(2-16)$$

となる．$w_1(u,b)$ から逐次的に計算することで以下を導ける；

$$w_n(u,b) = \frac{1+\theta}{(1+\delta/\lambda)^n}\ \mathrm{e}^{-\beta(b-u)}$$

$$\times \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n-k)!} [q(b-u)]^{n-k}\, p^{k-1} \times G(n,k),$$

---

5 有限期間の配当モデルの先行研究については，ドリフトを伴う幾何ブラウン運動によってサープラスが記述される配当モデル（Leung et al. [2008]）において生存確率（１－破産確率）や累積配当現価の解析解が得られている．Cramér-Lundberg モデルについては Cardoso[2014]によるバリア配当戦略および閾値戦略の場合の数値計算アルゴリズムの提案とその計算結果がある．

$$G(n,k)=\sum_{l=0}^{k-1}\frac{(n-l-1)(n+l-2)!}{l!\,(n-1)!}\times q^{l}$$

・・・(2−17)

危険理論におけるモデルの多くは陽な表現がないことから，一般に数値シミュレーションに頼らざるを得ない．上記のように陽な表現として導出できることはモデルの振る舞いを理解するうえで有益である．従って，n 回目の保険金支払の発生直前までの累積配当現価は

$$W^{(n)}(u,b)=\sum_{k=1}^{n} w_k(u,b) \quad ・・・(2-18)$$

と表すことができる．

保険期間 N 年の契約群団を考える場合，n 回目の保険金支払が起こる時間の期待値 $E[T_n]$ は

$$E[T_n]={}^{n}/_{\lambda} \quad ・・・(2-19)$$

と表せることから，$E[T_n]=n/\lambda=N$ となる n を設定することで保険期間 N 年の契約群団における累積配当現価を定義でき，有限時間における配当モデルを議論することが可能となる． このとき，年間平均配当額 d は,

$$d=\frac{W^{(n)}(u,b)\big|_{\delta=0}}{E[T_n]} \quad ・・・(2-20)$$

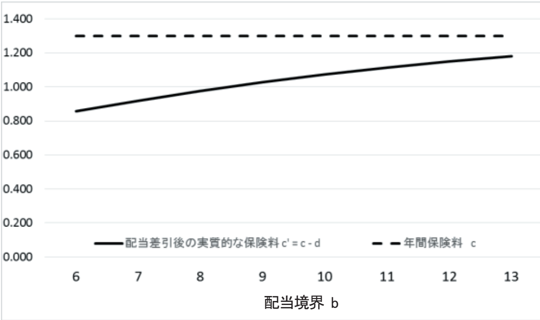
となり，年間保険料 $c=\lambda(1+\theta)$ に対して，契約者配当差引後の実質的な保険料は,

$$c-d=\lambda(1+\theta)-\frac{W^{(n)}(u,b)\big|_{\delta=0}}{E[T_n]}$$

・・・(2−21)

となる． 配当差引後の実質的な保険料 $c-d$ は配当境界 b をパラメータとする関数とみれば図５のようになる．直観的にもわかるとおり，配当境界を引下げることで，配当差引後の実質的な保険料を減少させることができる．

図5. 配当差引後の実質的な保険料の数値例



初期サープラス 5，安全割増率 30%，年間平均発生件数 1 件

$W(u,b)$と同様に有限期間における破産確率を定義しておく．またこれ以降，破産確率とは，保険ビジネスの停止ではなく，単にサープラスがはじめて負値となる確率を指すものとする． $V(u,b)$や$W(u,b)$のいずれにおいても破産確率は共通（$V(u,b)$はその後配当支払いが停止）である．無限期間を考える場合，1 件の保険金支払が発生した時に，それが有限の配当境界の水準を超える確率はゼロでないことから，無限期間において破産確率は$\psi(u,b)=1$となる．破産確率$\psi(u,b)$をある特定の保険金支払の発生ではじめて破産する確率$\varphi(u,b)$の総和として定義する；

$$\psi(u,b)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(u,b) \quad ・・・(2-22)$$

例えば，$\varphi_k(u,b)$ は$k-1$回目の保険金支払の発生までは破産せず，k 回目の保険金支払ではじめて破産する確率を表す． 1回目の保険金支払ではじめて破産する確率は,

$$\varphi_1(u,b)$$
$$=\int_0^{\tau}dt\,\lambda e^{-\lambda t}\int_{u+ct}^{\infty}dx\,e^{-x}+\int_{\tau}^{\infty}dt\,\lambda e^{-\lambda t}\int_{b}^{\infty}dx\,e^{-x}$$
$$=\frac{1}{2+\theta}e^{-u}\left[1+(1+\theta)exp\left(-\frac{2+\theta}{1+\theta}(b-u)\right)\right]$$

・・・(2−23)

となる．従って n 回目の保険金支払が発生したとき，破産している確率は

$$\psi^{(n)}(u,b)=\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(u,b) \quad ・・・(2-24)$$

と表すことができる． $b \to \infty$とすれば，（2－24）式は配当境界が存在しない場合の破産確率となる；

$$\psi^{(n)}(u) = \lim_{b\to\infty} \psi^{(n)}(u,b) \quad \cdot\cdot\cdot (2-25)$$

2.4 公平性をふまえた契約者配当

本節では契約者間の公平性を踏まえた契約者配当政策の一般論を述べる．契約者配当では，株主配当と異なり，契約者間の公平性の確保が重要となる．今，公平性を比較する 2 つの契約群団として，保険引受リスクが同水準（リスク同質）である無配当タイプの保険契約 A と有配当タイプの保険契約 B を考える．保険引受リスクとは，本モデルにおいては保険金支払件数 N_t （パラメータ λ）や 1 件当たりの保険金支払額 X（パラメータα）が確率変数であることにより保険会社が損失を被るリスクをいう．このとき保険料，配当差引後の実質的な保険料および破産確率はそれぞれ次のようになる；

保険契約 A （無配当タイプ）

保険料 $c_0 = \lambda(1+\theta_0)/\alpha$

配当差引後の実質的な保険料 c_0 **（保険料と同じ）**

破産確率 $\psi^{(n)}(u)$

保険契約 B （有配当タイプ）

保険料 $c = \lambda(1+\theta)/\alpha$， $\theta_0 < \theta$

配当差引後の実質的な保険料

$$c - d = \lambda(1+\theta)/\alpha - W^{(n)}(u,b)|_{\delta=0}/E[T_n]$$

破産確率 $\psi^{(n)}(u,b)$

無配当タイプの保険契約 A は 1.1 節で紹介した契約群団を前提としており，その保険料水準は安全割増率 θ_0 （有配当タイプの安全割増率 θ と区別するためにθ_0とした）により決定される．無配当タイプの保険契約は配当による事後精算がないことから内部留保を考慮したうえで，より安価な保険料率が求められる．一方，有配当タイプの保険契約 B は配当による事後精算があることから，安全割増率 θ の水準を保険契約 A よりも高めに設定することが可能となる．

保険契約の保険引受リスク水準が同一であれば，配当差引後の実質的な保険料は同一であるべきという公平性の条件を要請することで，2 つの保険契約には以下の重要な関係が成り立つ[6]；

$$c_0 = c - d \quad \cdot\cdot\cdot (2-26)$$

$(2-26)$式を配当境界 b について解くことで $b = b\,(\theta_0,\ \theta)$として，その水準が決定される．

なお，保険料については，市場のある金融商品の価格付けと異なり無裁定条件を用いた合理的算出ができないことから，期待値原理や分散原理，標準偏差原理など様々な保険料算出原理（安全割増決定原理）が考案されている[7]．本研究では保険料算出原理の内容まで言及しないが，少なくともリスク同質な契約群団は同一の保険料であるべきという公平性の条件が備わっていればよい．安全割増率 θ_0 および θ の水準については，例えば標準偏差（リスク量）の一定割合をリスクプレミアムとする標準偏差原理から

$$c_0 t = E[S_t] + h_0\sqrt{V[S_t]},\quad \theta_0 = h_0\sqrt{V[S_t]}/E[S_t],$$
$$ct = E[S_t] + h\sqrt{V[S_t]},\quad \theta = h\sqrt{V[S_t]}/E[S_t],$$
$$h_0 < h \quad \cdot\cdot\cdot (2-27)$$

と決定することができる．

---

[6] 保険実務では契約者の期待や営業政策的な動機，配当が将来的に確約されたものでないなどの理由により，有配当タイプの保険契約の配当差引後の実質的な保険料は無配当タイプの保険契約の保険料よりも低廉なものとなるよう設定することが多いものの，第一義的にはこの保険技術的公平性ともいうべき条件が成り立つものと考える．

[7] 保険料算出原理については，日本アクチュアリー会[2011]，清水[2018]および河本[2016]に基本となる幾つかの原理や保険料に望まれる性質（加法性や正の同時性など）の紹介がある．

2.5 公平な契約者配当の具体的な数値例

2.4節で設定した2つの保険契約AとBについて保険期間1年の場合の具体的な数値例を示す（表1）.

表1．具体的な数値例（保険期間1年）

	保険契約A	保険契約B
安全割増率	52.0%	81.5%
年間保険料	30.40	36.29
配当差引後の年間保険料	30.40	30.40
配当境界	—	19.14
破産確率	9.91%	5.13%

初期サープラス $u=5$, $\alpha=1$, 年間平均発生件数$\lambda=20(n=20)$

安全割増率θ_0およびθの水準決定は標準偏差原理$(2-27)$式によるものとした．一定割合h_0およびhの水準について，例えば無配当保険については信頼水準95.0%のリスク量，有配当保険については信頼水準 99.5%のリスク量に備えるものとのすれば，$h_0=\ 1.645$および$h=2.576$となり，これに相当する安全割増率はそれぞれ$\theta_0=52.0\%$および$\theta=81.5\%$となる．

ここで，表1における破産確率に注目したい．比較した 2 つの保険契約については保険引受リスク水準が同一であることを前提とした．保険引受リスクとは，上述したとおり，保険金支払件数N_tや1件当たりの保険金支払額X が確率変数であることにより保険会社が損失を被るリスクであり，一方，破産確率とは，保険会社が安全割増や配当境界の水準を用いてリスクをコントロールした結果としてその水準が決定されるものである．数値例からわかるとおり、同一のリスク水準、かつ、同一の実質的な保険料であっても、有配当タイプの場合には破産確率を無配当タイプよりも低下させることができる．契約者に配当を還元するためには財務の健全性が確保されていることが前提となることから，配当または配当境界の水準決定の際は、破産確率の水準が保険会社の許容する水準であることを確認する必要がある．このように配当モデルは，配当境界の水準が決定されると同時に，確率論的な視点から健全性指標（破産確率）が確認できるという点において有用である．

保険期間が 1 年以上の保険契約に関する配当境界についても，公平性の条件を要請することで，その水準を決定することができる；

表2．保険期間ごとの配当境界の数値例

保険期間	1年	2年	3年	・・・
配当境界	19.14	29.30	39.44	・・・

初期サープラス $u=5$, $\alpha=1$, $\theta_0=52.0\%$, $\theta=81.5\%$

3 まとめ

3.1 結論

本研究では危険理論における配当モデルを用いて生命保険会社の契約者配当政策について論じた. 契約者配当では，株主配当と異なり，契約群団間の保険引受リスク水準が同一（リスク同質）であれば，配当差引後の実質的な保険料は同一であるべきという公平性が重要である. 一般に生命保険会社には様々な保険引受リスク水準を持つ保険契約が多数混在しているものの，いかなる有配当タイプの保険契約に対する配当の水準も，リスク同質な無配当タイプの保険契約と実質的な保険料を同一とする公平性を要請することで決定される．無配当タイプの保険契約の保険料が適切な保険料算出原理に従って導出される限り，契約者配当政策は配当差引後の実質的な保険料を通じた広義の保険料算出原理に過ぎない．このとき，実質的な保険料の公平性の確保の橋渡しとして単位期間当たりの累積配当額が重要な役割を果たす．本研究ではその陽な表現の導出にあたっては前提に組み込まれる時間スケール$1/\lambda$を用いることで累積配当額の有限期間化の工夫を行った.

これにより，異なる保険引受リスク水準を持つ無配当タイプの保険契約の保険料が互いに保険引受リスクをふまえた適切な保険料算出原理により水準が決定されていれば，保険会社の保有するすべての有配当タイプの保険契約間の配当の公平性も確保され，同時に配当境界も決定される．本研究のサープラスについては Cramér-Lundberg モデルに基づくバリア配当戦略を前提としたが，確率過程や配当戦略が異なっても，契約者間の公平性の条件は要請されるものであり，配当水準の決定に一定の制約を与えることに変わりはない.

3.2　課題と今後の展望

本研究における配当モデルは前提がシンプルであるとともに，累積配当額が陽な表現を持つことから分析や評価に便利である一方，以下述べるように幾つかの点で実務への適用を考えるうえでは改良の余地があり，今後の課題としたい．

① 契約者配当と株主配当のバランス

本研究では配当金をすべて保険契約者に還元するものとして配当モデルを論じてきた．生命保険相互会社においては株主が存在しないことから，契約者間の公平性のみを基礎とする配当政策は一定の合理性はあるものの，生命保険株式会社においては契約者配当に加えて株主配当も同時に行う必要がある．この場合，１つの方策として 契約者配当については有配当および無配当タイプの公平性の要請から一旦配当境界の水準b_1を決定し，さらに破産確率の水準が保険会社の許容するレベルに達するまで配当境界を引き下げ（b_2），その引き下げ幅（$b_1 - b_2$）に相当する部分を株主配当とすることが考えられる．しかしながら，株主配当部分の最適配当の基準はあくまで累積配当現価の最大化であり，先行研究で紹介した最適配当戦略の論考が別途必要になると考えられる．

		無配当タイプ	有配当タイプ	基準
単位期間当たりの保険料		c_0	c	保険料算出原理
単位期間当たりの累積配当		d_0	d	
	契約者配当	0	d_1	公平性
	株主配当	d_0	$d - d_1$	最大化

② リスク量が適切に反映された保険料算出原理

2.4節および2.5節で示した保険料は，その一例としてリスクを標準偏差で測る標準偏差原理を用いたものである．保険料算出原理にはこれ以外にも様々な考え方や性質を持つものが提案されており，リスク量を適切に反映すること自体単純ではない．例えば，保険会社の効用関数を用いて指数効用

$$g(x) = (1 - e^{-hx})/h,$$

$(g'(x) > 0,\ g''(x) < 0,\ h$：リスク回避度 $)$

を仮定したゼロ効用原理を前提とする場合には，

$E[g(u + ct - S_t)] = g(u)$ より，

$$c = logE[e^{hS_t}]/ht \qquad ・・・(3-1)$$

が導かれるものの，上記 $(3-1)$ 式は保険料に対するリスク量の反映の考え方が不明瞭なものとなっている．本研究の基礎は“リスク同質な契約者間の保険料は同一であるべき”という要請に支えられており，当然に保険引受リスクの水準が異なれば，その水準の相違が適切に保険料に反映されていなければならない．期待効用原理に限らず保険料算出原理の前提によってはリスク量の反映の考え方が不明瞭であり，リスク水準の異なる契約者間の保険料の公平性をどのように組み込むかという点において課題が残る．

③ 配当還元の前提となる健全性指標

2.5節において，契約者配当を還元するためには財務の健全性の確保が前提となる旨を述べた．その際，健全性指標としては危険理論の枠組みで一般に論じられる破産確率を用いた．しかしながら，保険会社のリスク管理の実務において用いられるリスク尺度としてはVaRが多い．破産確率はサープラスの負値をもたらす損失がどの程度起こり得るかを計測するものであるのに対し，VaRは信頼水準（99.5%など）を設定し，最大損失額を計測するものである．わが国において現在検討が進められている経済価値ベースのソルベンシー規制の導入をふまえると，ESR（経済価値ベースのソルベンシー比率）を計測する際もVaRを用いることが一般的であることから，破産確率ではなく VaRをベースとしたESRによる健全性指標の方が今後の実務的な有用性は高いと考えられる．ESRとの関係性を含めた配当モデルの定式化については別稿に委ねたい．

④モデル選択およびモデル・パラメータについて

本研究においては確率過程が Cramér-Lundberg モデル（複合ポアソン過程）に基づくものとし，さらに１件当たりの保険金額については一例として指数分布に従うものとした．生命保険会社の危険差配当の対象となる保障性商品には様々な種類があることから，そのモデル選択上の妥当性について触れて

おきたい．まず単位期間当たりの支払件数がポアソン過程に従うことについては，多くの保障性商品においてその母集団（保険契約件数）が十分に多ければ保険事故発生率に従う二項分布はポアソン分布に近似できることから，一定規模の保有契約件数を前提とすれば，一定程度妥当であると考えられる．しかしながら，1 件当たりの保険金額および給付金額が従う分布については，指数分布が適用できる商品は一部の保障に限られる．例えば，多くの保険会社において販売する医療保険については，その主な保障内容は入院給付金や手術給付金であり，加入時に定めた入院日額に対して，それぞれ入院日数や手術内容に応じた倍率を乗じてその金額が決定されることが多い．入院日数についてはより長期になるほど発生頻度は低下すること，手術内容に応じた倍率についてはより倍率が高くなるほど（より重い手術になるほど）発生頻度は低下する傾向があることから，単純なモデルとして指数分布を用いることは一定程度妥当であると考えられる．但し，モデルの適合性について更に高い精度を求める場合は指数分布から同じく解析解を持つアーラン分布へ拡張するなどの工夫が別途必要であろう．一方，伝統的な死亡保険のように保険金額が一定額である場合，支払額は確率変数でなく定数となることから，指数分布などのように高額保障部分まで裾野（テール）を持つような分布を用いて近似させることはできない[8]．この場合，別途 1 件当たりの保険金額を一定額として累積配当現価や破産確率についてモデル構築する必要がある．

また，モデル・パラメータについて，本研究では単位期間当たりの支払件数や 1 件当たりの保険金支払額の平均をそれぞれ λ や $1/\alpha$ とし，時間に依存しない定数として扱った．しかしながら，一般に保険契約は保険期間が長期になるほど契約者群団の発生率は上昇する傾向にある．また，健常者ほど解約率が高く，保険会社に残された保険契約群団はリスク濃縮していく可能性があることから，モデルの前提に用いる単位期間当たりの保険金発生件数や 1 件当たりの保険金支払額も時間の経過に応じてモデル・パラメータが変化（非定常マルコフ過程）していくことも十分に想定され，この点についても改良の余地がある．

⑤ 契約者配当の安定性

生命保険における契約者配当，特に個人保険分野については，保険契約者は比較的安定した配当を期待していることから，保険会社はある年度に発生した剰余を配当として全額還元せず，一部を内部留保し，契約者配当の安定性に努めることも重要となる．本モデルにおいては，サープラスが配当境界に到達後，保険金支払が発生した場合，再度サープラスが配当境界の水準に達するまで配当金の支払いが停止されることから，安定配当の視点からは課題があるといえる．

以上，検討すべき課題はあるものの，本研究がさらなる理論の発展および生命保険会社実務への応用に少しでも役に立つことがあれば幸いである．

[8] 例えば死亡保険金額については，保険金額 100 万円の低額保障から数億円の高額保障まで保険契約者が任意に設定することが可能であり保険会社の取扱範囲内で一定の幅が存在するものの，本研究では“リスク同質の契約”を契約群団単位として扱っていることから，保険金額 100 万円の保険契約と保険金額 1 億円の保険契約をリスク同質として同一の保険契約群団とみなすことはできない．従って，保険契約群団の保険金額としてはある特定の保険金額（一定）として取り扱う必要がある．

付録 $(2-17)$式の証明

$(2-16)$ 式と同様に$w_{n+1}(u,b)$ を $w_n(u,b)$ の積分で表し，それに $w_n(u,b)$の一般解を代入することにより，$w_{n+1}(u,b)$ が$(2-17)$ 式と同様の算式;

$$w_{n+1}(u,b)=\frac{1+\theta}{(1+\delta/\lambda)^{n+1}}e^{-\beta(b-u)}$$
$$\times\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{(n-k+1)!}[q(b-u)]^{n-k+1}\,p^{k-1}G(n+1,k)$$

となることを示す.

$w_n(u,b)=e^{-\beta(b-u)}\mu_n(u,b)$,

$w_{n+1}(u,b)=e^{-\beta(b-u)}\mu_{n+1}(u,b)$とおくと$(2-16)$ 式より

$$\mu_{n+1}(u,b)=I_{n+1}(u,b)+J_{n+1}(u,b)+K_{n+1}(u,b),$$

$$I_{n+1}(u,b)=\frac{1}{(1+\delta/\lambda)}q\int_u^b dx\,\mu_n(x,b),$$

$$J_{n+1}(u,b)=\frac{1}{(1+\delta/\lambda)}q\int_{-\infty}^u dx\,e^{-(u-x)/p}\,\mu_n(x,b),$$

$$K_{n+1}(u,b)=\frac{1}{(1+\delta/\lambda)}p\int_{-\infty}^b dx\,e^{-(b-x)/p}\,\mu_n(x,b),$$

・・・（A − 1）

を得る.

$\mu_n(u,b)$ =

$$\frac{1+\theta}{\left(1+\frac{\delta}{\lambda}\right)^n}\sum\nolimits_{k=1}^{n}\frac{1}{(n-k)!}[q(b-u)]^{n-k}\,p^{k-1}\times G(n,k),$$

$$G(n,k)=\sum_{l=0}^{k-1}\frac{(n-l-1)(n+l-2)!}{l!\,(n-1)!}\times q^l$$

と仮定し$(A-1)$ 式に代入すると，I_{n+1}，J_{n+1} およびK_{n+1} はそれぞれ以下となる；

$$I_{n+1}=\frac{1+\theta}{(1+\delta/\lambda)^{n+1}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n-k+1)!}[q(b-u)]^{n-k+1}\,p^{k-1}$$
$$\times G(n,k),$$

$$J_{n+1}=\frac{1+\theta}{(1+\delta/\lambda)^{n+1}}\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n-k+1}\frac{1}{(n-k-m+1)!}$$
$$\times\ q^{n-k+1}\,p^{m+k-1}\,(b-u)^{n-k-m+1}\times G(n,k),$$
$$=\frac{1+\theta}{(1+\delta/\lambda)^{n+1}}\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{(n-k+1)!}[q(b-u)]^{n-k+1}\,p^{k-1}$$
$$\times qG(n+1,k-1),$$

$$K_{n+1}=\frac{1+\theta}{(1+\delta/\lambda)^{n+1}}p^{n+1}\times G(n+1,n)$$

ここで,$G(n+1,k)=\sum_{l=1}^{k}q^{k-l}\,G(n,l)$ を用いた[9].
また J_{n+1} 式の 1 行目から 2 行目の変形においては, $\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n-k+1}f(k,m)=\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}f(k,m-k+1)$ を用いた. さらに， $G(n+1,k)=\ qG(n+1,k-1)+\ G(n,k)$ を用いて，最終的に,

$$\mu_{n+1}=I_{n+1}+J_{n+1}+K_{n+1}$$
$$=\frac{1+\theta}{(1+\delta/\lambda)^{n+1}}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{(n-k+1)!}[q(b-u)]^{n-k+1}\,p^{k-1}$$
$$\times G(n+1,k)$$

となる．従って,

$w_{n+1}(u,b)$

$$=\ e^{-\beta(b-u)}\,\mu_{n+1}(u,b)$$
$$=\frac{1+\theta}{(1+\delta/\lambda)^{n+1}}e^{-\beta(b-u)}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{(n-k+1)!}$$
$$\times[q(b-u)]^{n-k+1}\,p^{k-1}\times G(n+1,k)$$

を得ることから，数学的帰納法により$(2-17)$ 式が成り立つ.

---

9 $G(n,k)=\sum_{l=0}^{k-1}C(n,l)\times q^l$ における q^l の係数$C(n,l)$ について, $C(n,n-2)$の数列は $C(2,0)=1$, $C(3,1)=1$, $C(4,2)=2$, $C(5,3)=5$, $C(6,4)=14$, ・・・であり, 初等組合せ論で有名なカタラン数（Catalan number）が現れてくることは大変興味深い.

参考文献

河本淳孝 [2016], “安全割増の価格決定原理－金融と保険の価格決定原理の異同－”,保険学雑誌, 第634号

清水泰隆[2018], 保険数理と統計的方法, 共立出版

日本アクチュアリー会 [2011], 損保数理　第7章　保険料算出原理

Avanzi,B. [2009], “Strategies for dividend distribution: A review”, North American Actuarial Journal, 13(2): 217-251.

Borch [1967], The Theory of Risk, Journal of the Royal Statistical Society Series B 29(3): 432-467.

Bühlman, H. [1970], Mathematical Methods in Risk Theory. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York .

Cardoso,R. M. R. [2014], “Dividends in finite time horizon”, Applied Stochastic Models in Business and Industry 30(2): 172-182.

De Finetti, B. [1957], “Su un’ impostazione alternativa dell teoria collettiva del rischio”, Transactions of the XVth International Congress of Actuaries 2, 433-443.

Dickson D. C. M.[2005], Insurance risk and ruin. International Series on Actuarial Science. Cambridge University Press.

Dickson, D.C.M. and Waters, H.R. [2004], “Some optimal dividnes problems”, ASTIN Bulletin,34,49-74.

Egidio dos Rois [1993], “How long is the surplus below zero?”, Insurance: Mathematics and Economics 12:23-38.

Gerber, H. U. [1971],Der Einfluss von Zins auf die Ruinwahrscheinlichkeit. Bullutin de l’Association Suisse des Actuaires 1971(1):63-70.

Hernández,C. ,and Junca,M. [2015],“Optimal dividend payments under a constraint on the time value of ruin: Exponential claims”, Insurance: Mathematics and Economics, 65(1):136–142.

Leung,K.S., Kwok, Y.K. and Leung, S.Y.,[2008], “Finite-time dividend-ruin models”, Insurance: Mathematics and Economics 42(1):154-162.

The Policy for Policyholders' Dividend of Life Insurance Company based on the Cramér-Lundberg Model with Incorporating the Perspective of Fairness

Noriyuki Shimoyama†

Abstract

This study was performed to discuss the policy for policyholders' dividend of life insurance company based on a dividend model in risk theory. The optimal dividend problem in risk theory, which was originally discussed by De Finetti using a discrete-time binomial model, has been widely studied. The optimal dividend is basically determined to maximize the aggregate discounted dividend, however, most of the previous studies were discussed it from the viewpoint of shareholders' dividend. When policyholders' dividend is determined, fairness among policyholders must be taken into consideration. From an actuarial point of view, the net premiums after deducting dividends should be the same when the risk level of underwriting insurance is the same among a group of policyholders. Based on the idea, the net premium after deducting dividends for insurance with dividend-payment should be the same as the premium for insurance without dividend-paying whose risk is homogeneous with the dividend-paying insurance. As long as the premium for insurance without dividend-paying are derived from appropriate premium calculation principle, the policy for policyholders' dividend is only to follow a broad premium calculation principle that includes considering the net premiums after deducting dividends. In this study, we show that the level of policyholder dividends is necessarily determined by incorporating the perspective of fairness among policyholders into a dividend model based on the Cramér-Lundberg model.

† Fukoku Mutual Life Insurance Company, E-mail: noriyuki.shimoyama@fi.fukoku-life.co.jp