特別寄稿

金利リスク評価のための金利シミュレーションの方法 [1]

安岡　孝司*

2014 年 9 月 15 日投稿

概要

本稿は金利モデルを金利リスク評価に使う方法を実務向けに説明するものである．はじめに金利リスク評価の基本事項を無裁定価格理論との関連で説明する．そして HJM モデルでリスクの市場価格の定義を確認し，その推定法に関する考察を行う．次にガウシアン HJM モデルでリスクの市場価格を推定する方法を示し，それを使った金利シミュレーションの性質を理論的に説明する．またリスクの市場価格を金利の状態ではなく，金利変動のトレンドによって説明できることを示す．最後に金利シミュレーションの実現法をエンジニアリングの観点で考え，例としてハルホワイトモデルへの適用法と注意点を述べる．

キーワード：金利リスク，金利シミュレーション，リスクの市場価格，現実確率，ガウシアン HJM モデル

1 はじめに

保険会社のソルベンシ―リスクの評価において，金利リスクについては，金利変動の主成分を使って金利シナリオを生成する手法が用いられている．金利シナリオを現実確率下でモデル化することの意味をよく考えると，主成分のみのモデルが認められている状況には危ないものを感じる．

「現実確率下のモデル」の意味は，なかなかひとことでは説明できない．このテーマを考え続けてきたこともあり，なんとか一言で言えるようになってきた．極めて平凡だが，「金利変動のシナリオ生成に不確実な変動と確定的なドリフト（トレンド）を合理的に反映させること」に尽きる．

主成分を使う手法は不確実な変動をモデル化したことにはなるが，トレンドを反映したことにはならない．実際，1990 年以前の数年間は極端な金利上昇局面であり，その後は 20 年以上に及ぶ金利低下局面である．これをトレンドと考え，主成分から生成する金利シナリオに重ね合わせる必要はないのだろうか．トレンドを反映させる場合でも，直近のデータを重視するという考え方で，金利低下局面のトレンドを重ね合わせてもよいのだろうか．あるいは 30 年ほどの長い観測期間のデータを使えば合

*芝浦工業大学大学院 工学マネジメント研究科
〒108-0023 東京都港区芝浦 3-9-14
yasuoka@shibaura-it.ac.jp

1　本研究の一部は JSPS 科研費 26380399 の助成を受けたものである．

理的といえるのだろうか．リスク管理の観点でどうあるべきかの議論が行われていないように思う．

また，リスク評価の高度化のため，ネスティドシミュレーションに取り組む場合，HJM モデルなどの無裁定な金利モデルを使うと，金利シナリオにプラスのドリフトが生じる（理由は 4.5 節に記述）．主成分だけで金利シナリオを作った場合はドリフトがゼロのモデルである．したがって，モデルの高度化に取り組む金融機関のほうが金利上昇リスクの評価では不利である．

筆者が経営者なら，ネスティドシミュレーションモデルの開発をストップし，主成分による方法を採用する．技術開発のコストと，金利リスク量のふたつを同時に削減できるからである．このおかしな状況になっていることに疑問が上がってこないのは，現実確率下のモデルでリスク評価をすることの意味が解明されていなかったからである．

十数年前，ある都市銀行の若手行員が「リスク管理のためのシミュレーションは現実確率の下で計算すべきである．そのためには "リスクの市場価格" を推定してリスク評価しなければならない」と，リスク管理部に提言した．すると「そのようなわからないものは扱えない」と却下された．この昔話を聞いたのは 2012 年の夏である．その行員は後に大学教師になったので，2000 年前後の話であろう．社会の変化はますます速くなっているにも関わらず，この状況は十年以上経った今日でもまったく変わっていない気がする．しかしながら，上述のソルベンシーリスクの評価など，現実確率で考えるべき課題の重要さは確実に増している．

決して十分とはいえないが，この問題に少し答えられるようになってきた．金融機関でリスク管理やＡＬＭに関わる人は，必ずしも金融工学の専門家ではない．そのような人達に，金利モデルで金利リスクを測るためにはどうあるべきか，何に注意すべきかを広く伝えることが本稿の目的である．

本稿の 2 章では金利リスク評価と無裁定モデルの考え方を実務の目線で確認する．金利モデルはリスク中立なモデルとして実用化されているが，金利リスク評価に使うときは現実確率でのモデルに戻して計算しなければならない．その鍵はリスクの市場価格の推定である．その方法は計量経済学の観点でいくつか報告されている（Stanton[1997]，Dempster et al.[2010]など）．それらは短期金利モデルベースでの内容なので，長短金利のリスク管理に使うにはフォワードレートモデルでの方法論が必要である．この問題について LIBOR マーケットモデル（Brace et al.[1997]，Musiela-Rutkowski [1997]，Jamshidian [1997]）のケースでひとつの方法を示すことができた（Yasuoka[2013]）．同じことを HJM モデル（Heath et al.[1992]）で展開したところ，さらに明快に説明できるようになった（Yasuoka[2015]）．後者のほうがわかりやすいので，本稿は HJM モデルで説明するが，エッセンスは LIBOR マーケットモデルのときと同じである．

3 章では HJM モデルでリスクの市場価格の定義を確認し，その推定法に関する考察を行う．4 章はガウシアン HJM モデルでリスクの市場価格を推定する方法を示し，それによって導かれるシミュレーションモデルの性質を体系的に説明する．またリスクの市場価格を金利の状態ではなく，金利変動のトレンドによって説明できることも示す．5 章では金利シミュレーションを実現するときの課題や注意点についてエンジニアリングの観点で説明する．そしてハルホワイトモデルで実現する方法について述べる．6 章では国内の金利データを使った計算例を示す．

2 金利リスク評価に関する基礎事項

この章では無裁定価格理論を扱うが，リスク管理者向けの内容であり，直観的な説明になっていることをお断りしたい．

2.1 金利リスクと VaR

金融資産には市場リスクや信用リスクなどが内在している．市場リスクとは金利，為替，株価変動などに起因する資産価格の変動リスクで，とくに金利変動による価格の変動リスクを金利リスクとい

う．金利リスクには金利感応度（金利変化当たりの価格の変化）という尺度がある．本稿では金利感応度を扱わないので，”金利リスク”を金利変化に対する資産価格の下方リスクの意味で使う．

本稿で扱う債券は，断りがなければ無リスクなゼロクーポン債である．また簡単のため，確率という用語を二つの意味で使う，ひとつは確率測度であり，もうひとつはその測度下で測った確率である．文脈からどちらかわかるのでとくに混乱はないであろう．

金利リスクの大きさを測るポピュラーな尺度はバリューアットリスク（VaR）である．これは学者に不人気で，より優れたリスク尺度を考える研究が盛んに行われている．実務でも条件付き VaR(CVaR, CTE)が一部では導入されているらしい．将来，リスク尺度が VaR 以外のものに変わるかもしれないが，電球が古くなれば，新しいものに換えればよい．どのような尺度に変わっても本稿の議論は適用できるはずである．

資産価格の損失分布を予想し，99%の確率でその損失を超えないという額を 99%VaR という．これは 99%VaR 以上の損失を被る確率が 1%残されているという意味でもある．95%VaR や 97.5%VaR も同様である（図 1）．計算上の損失はマイナス値だが，VaR はプラス値で表される．VaR の基本的な知識については FFR+[2010]などを参照のこと．

資産価格の変動を引き起こすリスクファクターには株価，金利，為替の変動や信用力の変化などがある．とくに金利変動による VaR を金利 VaR と呼ぶが本稿では金利 VaR しか扱わないので，単に VaR で表す．

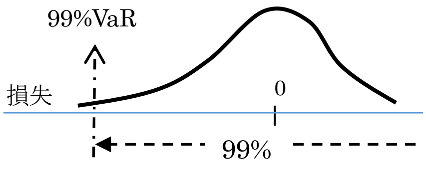


図１　予想損失額の確率分布と VaR
（左側ほど損失が大きい）

2.2 VaR を現実確率で計算する理由としない理由

VaR の計測にはヒストリカルデータを使うヒストリカル法，分散共分散法，モンテカルロシミュレーションなどがある．本稿では金利モデルのモンテカルロ法によるリスク評価を考える．

金利モデルは実用時にリスク中立確率下でモデル化されているので，これを現実確率下でモデル化する必要がある．現実確率（real-world measure, actual measure）とは我々が市場データを観測して推定する確率のことである．たとえば金利が 1 年で 200bp 上昇する確率が経験的に 100 年に一度なら，それが現実確率である．したがって market measure，historical measure，objective measure とも呼ばれる．また，サイコロを振って 1 が出る確率が 1/6 であることも現実確率である．一方リスク中立確率は無裁定価格を計算するときに使われる人為的な確率である．これについては 2.5 節と 3.1 節で説明する．

この節では VaR を現実確率で評価しなければならない理由を考えてみたい．そのために満期日まで１年の無リスクでゼロクーポン債券を考える．この債券の償還価格は満期日の 6 か月 LIBOR によって決まるとしよう．図 2 のように LIBOR が 5%未満なら 100 円で償還されるが，5%以上のときは 0 円（無価値）で返ってくるものとする．一種のデジタルボンドである．この債券を 95 円で購入した場合の 99%VaR を測りたい．

このようなオプション性の債券は金利モデルで価格を計算する．そのときに使われる確率はリスク中立確率である．簡単のため割引率を 1 として考えている．

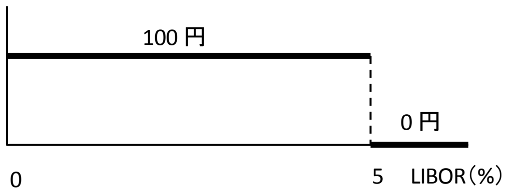


図２　デジタルボンドの満期でのペイオフ

表 1　評価する確率測度によって VaR が変わる

	リスク 中立確率	現実確率
償還額 100 円の確率（%）	95	99.5
償還額 0 円の確率（%）	5	0.5
99%VaR　（損失）	95	−5

この確率で 1 年後の LIBOR が 5%未満である確率が 95%としよう．この債券の時価は 95 円である．これが 100 円で返ってくる確率は 95%である．したがって 99%VaR は 95 円（= 95−0，損失）である．

一方ヒストリカルデータを分析し，1 年後の LIBOR が 5%未満になる確率が 99.5%と予想できたとしよう．これが現実確率である．満期日に 100 円で返ってくる確率は 99.5%あるので VaR は−5 円（=95−100，利益）である．

資産価格が，使う確率に依存しないことは 2.6 節で説明するが，この例は，VaR が使う確率によって値が異なることを示す．本来なら VaR は現実確率で測らなければならないが，その方法はほとんど研究されていなかった．金融の現場ではリスク中立確率で VaR を計算しているのが実状と考えられるし，規制側もそれ以上求めていない．しかし，例えば LIBOR マーケットモデルではスポット LIBOR メジャーやフォワードメジャーなど，さまざまなリスク中立確率が使われているので，扱う測度によって VaR が異なるという面倒なことになっている．

リスク管理の手法をいくつかの金融機関に私的にヒヤリングした範囲では，「問題はわかっているが方法がないので，リスク中立確率で計算している」との回答が多かった．また金融ソリューションのベンダーに尋ねたこともある．問題意識のない担当者もいたし，まったく見当違いな根拠を盾に「リスク中立確率でやればよい」と断言する担当者もいて，あきれたこともあった．

リスク中立確率で金利 VaR を測っている状況の理由はさまざまだが，大きくわけて以下の二つである．

a）リスクの市場価格の計算がわからない．

b）金利上昇リスクを考えた場合，リスク中立確率で計算したほうが現実確率より安全側評価になる．

a）は技術．理論上の限界なので仕方がないが，本稿はそれがすでに限界ではないということを説明するものでもある．b）は経験的にリスクの市場価格はマイナス値なので，現実確率で計算すると金利が低めになるという考え方である．これは a）に比べると，はるかに高度な知見に基づく考え方だが，直感的な解釈であり，合理的な根拠は見当たらない．リスクの市場価格がプラス値を取る可能性については 4.4 節で指摘する．

2.3 現在価値ベースの VaR

VaR の計算時に 1 年後の金利変動を想定する場合，債券なら残存期間が 1 年分短くなることとクーポン収入の効果を考える場合と考えない場合がある．前者は実務では収益シミュレーションなどで使われる考え方である．後者は 1 年間に想定しうる金利変動を今日の金利に足した金利状況下で，ポートフォリオなどの時価を測るので時間の経過を考えない．

後者の方法は簡単なので広く使われていると思うが，一般的な議論を展開するため，ここでは前者の方法を考える．これは VaR を現在価値ベースで測る方法でもある．

年 1 回払いのクーポンが 1 円の超長期の無リスク債券を考える．市場金利を 1%フラットと仮定すると，この債券の今日の価格は 100 円としてよい．これの 1 年後の価格の確率分布を推定し，99%信頼区間の価格を 90 円としよう．単純計算では

$$100-90=10 \qquad (\text{円})$$

より，99%VaR は 10 円（損失）である．

実際には債券は金利分の価格上昇（利付国債の場合の利子）を期待できるので，その効果を考える必要がある．簡単のため 1 年後がこの債券の利払い日とする．金利変動がなければ，1 年後の債券価格は 100 円のままである．これにクーポン収入を加えると，1 年後の価値は 101 円である．それが 90 円に下がるなら 11 円の損失と考えたほうが合理的であ

る．これは 1 年後の損失なので，その損失を現在価値に割引いて，

$$11 \div 1.01 = 10.89 \qquad (\text{円})$$

を VaR とする．

図 3 はこの債券の 1 年後の価値の確率分布の様子を表したもので，期待値を 101 円，99%値を 90 円としている．1 年後の 90 円の現在価値は 89.11 円なので，現在価値で差をとると，100 円との差額から

$$100 - 89.11 = 10.89 \qquad (\text{円})$$

となる．この計算から VaR を 10.89 円としても上と同じ結果である．

金利モデルを使う場合は，1 年後の確率分布を現実確率で求め，99%値を割り引けば現在価値ベースの VaR を求めることができる．

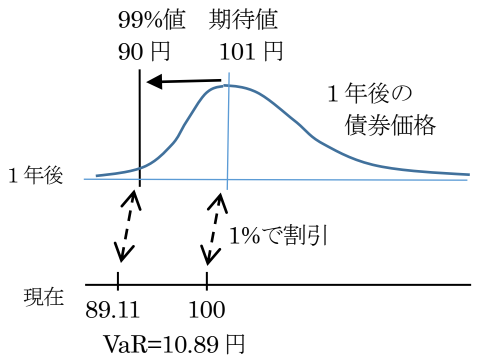


図 3　現在価値ベースで VaR を計算

2.4 無裁定価格の意味

現実確率の概念を意識し始めると資産価格とは何かという疑問に帰ることが多い．金融工学の体系では初めに通過するテーマで，いつの間にか忘れているので，簡単な例で考えてみよう．

1 か月後に当選発表がある宝くじ A を考える．当たる確率は販売数と当選数からわかり，それは現実確率である．1%の確率で賞金 1 万円がもらえ，残りの 99%は外れのとき，この宝くじの価値はいくらだろうか？簡単のため売り手の収益はないものとし，現在価値への割引は無視して考える．

この宝くじの受取の期待値は

$$10000 \times 0.01 + 0 \times 0.99 = 100 \qquad (\text{円})$$

なので，100 円と答えるのがふつうである．またそれ以上に説明力のある評価法はない．この宝くじの売り手は当選本数がわかっているので，100 円以下で売ると赤字になる．逆にこの宝くじをすべて買い占める人がいれば，その人はすべての当たりくじを手に入れるので，100 円以上では買わない．期待値の 100 円という価格でしか売買が成立しないので，宝くじ A の価値は 100 円と考えてよい．

つぎに別の宝くじ B を考える．当選発表が 1 か月後で，その日の 1 ドルが 120 円以上なら 1 万円もらえ，120 円未満ならハズレである．1 ドルが 120 円以上になる現実確率を 1%として，宝くじの価値を考えてみたい．これは為替オプションの一種なので，適切なオプションモデルで計算した結果が 200 円

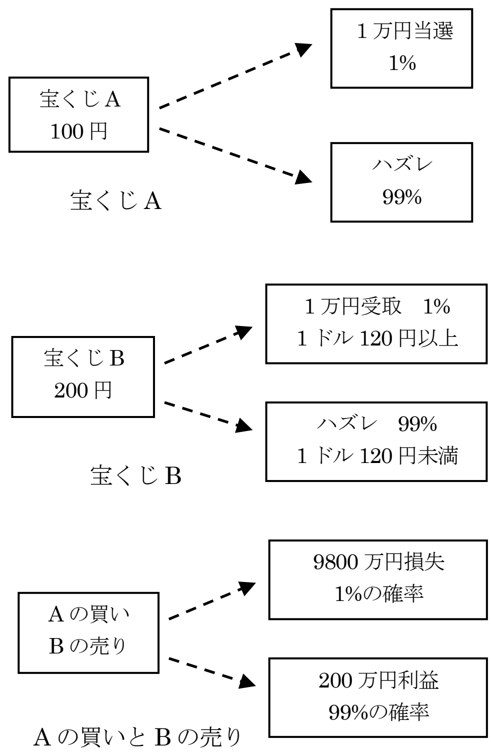


図 4　2 つの宝くじ

だったとしよう．A と B は購入者にとって確率的に同じ経済効果なのに，なぜ価格が違うのだろうか．その答えは複製できるか，あるいは裁定取引ができるかの違いである．例として次の取引を考えるとよくわかる．宝くじ B を 1 万枚売り 200 万円を得る．その資金で宝くじ A を 2 万枚買う．ざっと見積もれば 2 万枚の 1%の 200 枚が当たるとして，200 万円を得ると考えてよい．

宝くじ B の支払いは 99%の確率で 1 ドル 120 円未満であり，支払いがゼロなので，この場合は 200 万円の利益である．運悪く 1 ドル 120 円以上になったときは，1 万円を 1 万枚分つまり 1 億円支払う．売上は 200 万円なので，結果として 9800 万円の損失になる．まとめると，この取引は 99%の確率で 200 万円の利益だが，1%の確率で大損するので，裁定機会ではない．

A と B との間では裁定取引ができないのである．実務では 99%の確率で儲かるなら裁定取引というが，金融工学では厳密に区別して考える．

次に C を 1 ケ月後の満期に 1 ドルで償還される米国債とする．C の保有数をドル円レートの変動に合わせて増減させ，1 ケ月後に B と同じ価値に出来るものとする．この間，C を買う資金が不足すれば借金し，余れば預金することにし，投入資金の増減はないものとする．B をオプションだと考えれば，これは B を売った側のダイナミックヘッジと同じである．図 5 はこのイメージを表す．

このとき B は C で複製されたという．B の無裁定価格が 200 円ということは C のポートフォリオの t=0 での価格（価値）が 200 円であることを意味する．そうでなければ C と B の間で裁定が起きるからである．つまり無裁定価格とはなんらかの安全資産で複製されても裁定されない価格という意味を持つ．したがって B の市場価格は 200 円でよいのである．

次に 1 ドル 120 円以上になる確率を 2%，120 円未満の確率を 98%と仮定してみよう．この確率で期待値を取ると B の価値は

$$10000\times0.02+0\times0.98=200 \quad (\text{円})$$

の計算で 200 円である．1 ドル 120 円以上になる確率を 2%と仮定すると，B の期待値は市場価格の 200 円に等しいことになる．リスク中立確率とはこのような確率のことであり，「市場価格を説明する確率」と考えても大きく間違ってはいない．

もう一度宝くじ A の価格を考えてみよう．A の価値は当選発表日に為替レートとは無関係に突然決まる．これは他の資産で複製できないので裁定されることはない．また 100 円である限り，売り手と買い手のどちらにも有利不利が生じないことはすでに述べたとおりである．したがって金融資産の価格は裁定されない価格の意味で計算され，それはリスク中立確率での期待値と考えるとわかりやすい．しかし前節で述べたように，VaR は現実確率で計算しなければならない．もちろん現実確率でも無裁定価格の計算は可能である．それについては 2.6 節で説明する．

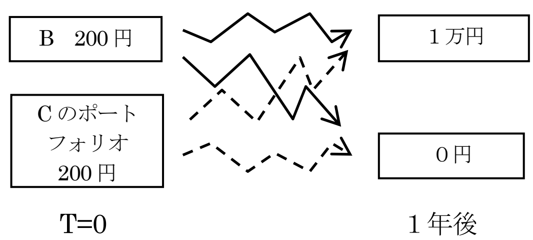


図 5　B を C で複製

2.5 無裁定条件の考え方

厳密な意味での無裁定条件は Harrison-Kreps [1979]と Harrison–Pliska[1981]で説明されている．本稿は金利リスクを考えているので債券のみの市場についての無裁定モデルの考え方を説明する．この場合も深い議論が背景にあるが，詳細はバクスター[2001]などを参照のこと．

ニューメレール（基準財）とは投資のパフォーマンスを比較するベンチマークのようなものである．HJM モデルでは瞬間的短期金利 $r(t)$ による無リスクな資産運用（savings account）をニューメレールとしている．それは次式で定義される．

$$B^*(t) = \exp\left\{\int_0^t r(s)ds\right\} \qquad (2.1)$$

時刻 t における満期 Tの債券価格を $B(t, T)$ で表す. Harrison-Pliska[1981]によると, 市場が無裁定であることと, P と同値な確率測度 Q が存在して, $B(t, T) / B^*(t)$ が Q でマルチンゲールになることは同値である. Q はリスク中立確率, あるいはマルチンゲール測度と呼ばれる. Q と P が同値とは, ある事象の確率を Q で測ってゼロなら Pで測ってもゼロであり, その逆も成立することである. このとき Q～P で表す.

マルチンゲールとは, かなり直観的に言ってしまうと, 将来の期待値が現在値と変わらないということである. $B(t, T)/B^*(t)$ の場合は

$$B(0,T)/B^*(0) = \mathrm{E}_{\mathrm{Q}}\left[B(t,T)/B^*(t)\right] \qquad (2.2)$$

が成立していると考えておけばよい. 厳密には同様の等式が任意の時刻 t で成立していることだが, その説明は手間なわりに難解なので省略したい. マルチンゲール過程のことをわかりやすく解説してある教科書としては, たとえばバクスター(2001)がある.

(2.2)は債券への投資パフォーマンスをベンチマークとの比でみると, 期待値ベースではどちらも同じということを意味している. あるいは, ニューメレールに投資しても長期債に投資しても投資のリターンは期待値として同じということでもある. これは実際に実現するかということではなく, (2.2)が成立するような確率測度が存在すれば, そのモデルで算出した債券価格は裁定されないということである. リスク中立確率はニューメレールによって変わるので一意的なものではない.

無裁定条件の意味を満期まで 2 年と 5 年の債券からなる市場の例で考えてみよう. 時刻 t でのそれぞれの価格を $B_2(t)$, $B_5(t)$ で表す.

2 年債をベンチマーク (ニューメレール) とすると, 市場が無裁定ならリスク中立確率 Q_2 (～P) が存在して

$$\frac{B_5(0)}{B_2(0)} = \mathrm{E}_{\mathrm{Q}2}\left[\frac{B_5(1)}{B_2(1)}\right]$$

が成立する. ここで $\mathrm{E}_{\mathrm{Q}2}[\ \ ]$ は Q_2 での期待値である (図 6). ニューメレールは 5 年債でもよい. この場合, 別のリスク中立確率 Q_5(～P) が存在し,

$$\frac{B_2(0)}{B_5(0)} = \mathrm{E}_{\mathrm{Q}5}\left[\frac{B_2(1)}{B_5(1)}\right]$$

が成立する.

Q_2 や Q_5 はフォワードメジャーとも呼ばれる. それに対して Q は savings account をニューメレールとするときのマルチンゲール測度であることからスポットメジャーと呼ばれる.

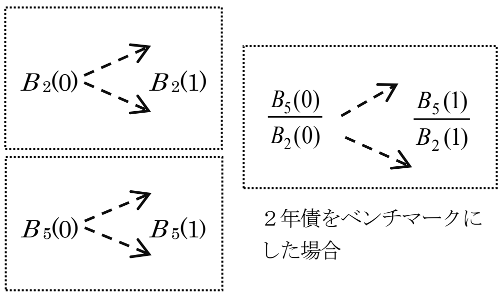


図 6　2 年債と 5 年債の投資比較

2.6 資産価格の計算とニューメレール

ニューメレールには何を使ってもよいわけではないので, この点について少し説明しておこう. たとえば前節の B_2, B_5 からなる市場を考える. B_2, B_5 がどのような性質をもつものであっても, うまく価格過程 $N(t)$ を定義すれば, $B_2(t)/N(t)$ と $B_5(t)/N(t)$ がマルチンゲールになる測度を構成出来るかもしれないからである. 優秀なクォンツがそれを無裁定モデルだと論じたら, 反論できる金融マンはほとんどいない. そのような混乱に陥らないために忘れてはならないことは, ニューメレールは投資のベンチマークに使える無リスク資産であることと, 市場で取引可能なものに限られるということである. これは実務の感覚でいうなら, 取引コス

トが僅少で流動性の高いということになる．またニューメレールの価格は相対価格の分母に使われるので，ゼロ円以下にならないことも必要である．

例えば，短期金利 $r(t)$ は資産ではないので，ニューメレールには使えない．金利を取引するという意味で金利先物があるが，これは差金決済の金融取引である．資産価値という意味で考えても，取引開始時はゼロで，その後プラスになったりマイナスになったりする．したがってニューメレールには使えない．オプションは資産の一種だが，満期日の価格がゼロになる場合があるので，これもニューメレールには使えない．

(2.1) の savings account は瞬間的短期金利による安全資産運用なので，理論上は取引可能な資産である．瞬間的金利は現実の市場に存在しないが，実務ではオーバーナイト金利による運用に該当している．長期のゼロクーポン債も理論上の取引可能な資産であり，ニューメレールに使われる．これは現実には発行されていないが，実務では国債市場のゼロクーポンレートから導かれる割引率（あるいはLIBOR/スワップレートから導かれる割引率）を債券価格にみなしたものに該当する．

また，資金の出し入れなし（自己充足的）でニューメレール資産を買い替えていくものでもよい．短期債を買って満期に売り，その資金で次の短期債を買い，この取引を続けるケースである．LIBOR マーケットモデルでは，これをニューメレールとする場合がある．そのときのリスク中立確率はスポットLIBOR メジャーと呼ばれている．

研究者によっては，債券は値下がりすることがあることからニューメレールに使うことに懐疑的な見方もあった．筆者も一時期この考えに傾いていたことがあったが，仕事での必要上からそうも言っていられなくなり，こだわりがなくなった．

では応用問題である．転換社債はニューメレールに使えるだろうか？

信用リスクがないと仮定すれば前述の条件をすべて満たすことは簡単に確かめられるので，ニューメレールに使ってもよい．しかし，転換社債は普通社債に株式への転換オプションを加えた金融商品である．これの価格過程は無リスク債券の価格過程よりもずいぶん複雑になるので，マルチンゲールメジャーを具体的に構成することはそれほど簡単ではない．したがって，転換社債をニューメレールに使う人はまずいない．

さらに，転換社債と普通社債と株式オプションからなる市場を考えたとき，投資のベンチマークには普通社債を使うのが自然である．転換社債をベンチマークに使う人は少ないのではないだろうか．

ニューメレールを取り換えると対応するリスク中立確率測度も変わるが，ニューメレールの選び方に寄らず，資産価格は同じである．これは次のように表される．$N_1(t)$，$N_2(t)$ をニューメレールとし，それぞれに対応するリスク中立確率測度を Q_1，Q_2（～P）とする．Q_1，Q_2 の下での期待値を $E_1[\ ]$，$E_2[\ ]$ で表す．ある証券（オプションや債券）の価格を $C(t)$ とし，時刻 Tでの価格 $C(T)$ がわかっているとき，時刻 0 での価格 $C(0)$は

$$C(0) = N_1(0)E_1\left[\frac{C(T)}{N_1(T)}\right] = N_2(0)E_2\left[\frac{C(T)}{N_2(T)}\right]$$

で表されることが知られている．詳しくはバクスター[2001]などを参照のこと．

次に現実確率 P での無裁定価格の計算を示すが，その考え方は数学的であり，多くの人にはわかりにくいかもしれない．ここでは現実確率下のモデルで無裁定価格が計算可能であることを知っておけば，以下は読み飛ばしてもよい．

債券価格のモデルが無裁定であることと，state price deflator $\xi(t)$ (pricing kernel とも呼ばれる) が存在して，すべての満期について $\xi B(t,T)$ が P -マルチンゲールであることと同値である．ここで $\xi(0)=1$ とする．上述の証券の価格は次式で与えられ，リスク中立確率下での価格と等しいことがわかっている．

$$C(0) = E_P\left[\xi(T)C(T)\right]$$

ここで $E_P[\ ]$ は P での期待値である．

2.7 リスクの市場価格

マルチンゲール測度によって無裁定条件を定義する方法は，債券の価格過程が確率微分方程式で表現されていないモデルにも適用できる．したがって非常に広いクラスのモデルを扱うことができる．

一方，金利モデルは金利や債券価格を確率微分方程式で表している．そのほうがオプション価格の解析式がわかる場合があり，モンテカルロシミュレーションを実施できるなどのメリットがある．この場合は無裁定条件を別の形で表すことができるので，それについて説明する．

2.3 節の 2 年債と 5 年債の価格過程が次式の確率微分方程式で表されるとしよう．

$$dB_2(t)/B_2(t)=\mu_2(t)dt+\sigma_2(t)dZ$$

$$dB_5(t)/B_5(t)=\mu_5(t)dt+\sigma_5(t)dZ \qquad (2.3)$$

ここで μ_2，σ_2，μ_5，σ_5 はぞれぞれの債券のドリフト項とボラティリティである．そして次式が成立すると仮定する．

$$\frac{\mu_2(t)-r(t)}{\sigma(t)_2}=\frac{\mu_5(t)-r(t)}{\sigma(t)_5} \qquad (2.4)$$

左辺の分子は瞬間的短期金利 r への投資（savings account への投資）に対する 2 年債の超過リターンで，分母は 2 年債の価格ボラティリティである．つまり 2 年債投資の超過リターンとリスク（ボラティリティ）の比であり，右辺は 5 年債投資についての超過リターンとリスクの比である．リスクリターンの投資効率を考えたとき，2 年債も 5 年債も同じということである．（2.4）式の比をリスクの市場価格といい，ϕ で表す．

$$\phi(t)=\frac{\mu_2(t)-r(t)}{\sigma_2(t)}=\frac{\mu_5(t)-r(t)}{\sigma_5(t)} \qquad (2.5)$$

リスクの市場価格の存在と市場の無裁定は同値であることが知られている．したがって，債券価格が(2.3)のような確率微分方程式で表される時，以下の 3 条件は同値である．

a) 債券市場が無裁定である．

b) ある確率 Q(～P)が存在し，Q の下で債券の相対価格過程がマルチンゲールである．

c) リスクの市場価格が存在する．

リスクの市場価格がユニークに存在することと市場が完備なこととは同値である．本稿は実務でのリスク管理を目的としているので，市場は完備として議論を進める．完備性については，たとえばバクスター[2001]などを参照のこと．

リスクの市場価格 ϕ と瞬間的短期金利 r がわかっているとき，state price deflator は次式で与えられる．

$$d\xi(t)/\xi(t)=-r(t)dt-\phi(t)dZ \qquad (2.6)$$

これによって state price deflator がわかれば，現実確率下での価格計算が可能になる．state price deflator (2.6)式の詳細については，例えば Munk[2011]を参照のこと．

3 金利モデルとリスクの市場価格

無裁定価格は確率測度に依存しないので，扱いやすいモデルで計算するほうが便利である．そのため実務で使われている金利モデルはすべてリスク中立確率下のモデルと考えられる．

本稿はリスク管理のために金利モデルを扱うので，現実確率下でのモデルを HJM のフレームワークで説明する．

3.1 HJM モデルとリスクの市場価格

HJM モデルはマルチファクターのフォワードレートモデルで，無裁定条件，リスクの市場価格，市場の完備性，リスク中立確率の関係が統一的に説明されている．そのフレームワークは付録 1 節に記すことにし，この節ではフォワードレート過程を記述するのみとする．数式が苦手な人は飛ばして(3.7)式から読めばよい．

時刻 t で将来時刻 T における瞬間的フォワードレートを $f(t,T)$ で表す．瞬間的短期金利 $r(t)$ は

$$r(t)=f(t,t)$$

である．満期が T のゼロクーポン債の価格 $B(t,T)$ は

$$B(t,T)=\exp\left(-\int_t^T f(t,u)du\right) \qquad (3.1)$$

で表される．(2.1)式の savings account B^*をニューメレールとする．

フォワードレート過程を次式で表す．

$$df(t,T)=\alpha(t,T)dt+\sigma(t,T)\cdot dZ \quad (3.2)$$

ここで．はベクトルの内積，α はドリフ係数，σ はボラティリティで $\upsilon(t,T)$ は次で定義される．

$$\upsilon(t,T)=-\int_t^T\sigma(t,u)du \quad (3.3)$$

付録1節での議論により，債券価格の挙動は

$$\frac{dB(t,T)}{B(t,T)}=\mu(t,T)dt+\upsilon(s,T)\cdot dZ$$

で表されるので，$\upsilon(t,T)$ は債券価格のボラティリティである．d ファクターモデルの場合，$\sigma(t,T)$ は d ファクターのボラティリティで，$Z(t)$ は現実確率 P の下での d 次元標準ブラウン運動である．付録の結果から，あるリスク中立確率 Q(～P) が存在し，フォワードレート過程は

$$df(t,T)=-\sigma(t,T)\cdot\upsilon(t,T)dt+\sigma(t,T)\cdot dZ^* \quad (3.4)$$

で表される．ここで $Z^*(t)$は次式で与えられる．

$$Z^*(t)=\int_0^t\phi(s)ds+Z(t) \quad (3.5)$$

Q の下で $Z^*(t)$ は d 次元の標準ブラウン運動になることがわかっている．$\phi(t)$ はリスクの市場価格で，次の解として定義される．

$$\mu(t,T)-r(t)=\upsilon(t,T)\cdot\phi(t) \quad (3.6)$$

したがって $\phi(t)$ は d 次元のベクトル値過程である．P と Q の関係はギルサノフの定理で具体的に決まるが，この定理はどの教科書にも書かれている．本稿では P と Q の違いを議論しなくても，それらの下でのシミュレーションの違いを説明できるので，これ以上立ち入らない．

現実確率 P でみたとき $Z(t)$ は標準ブラウン運動なので，その期待値は常にゼロである．一方 $Z^*(t)$ はドリフトしていく．逆にリスク中立確率 Q の下で $Z^*(t)$ は標準ブラウン運動なので，その期待値は常にゼロである．そして $Z(t)$ は P でみたときの $Z^*(t)$ とは逆方向にドリフトしていく．2.5 節で，ϕ は無裁定条件のためのパラメータとして定義

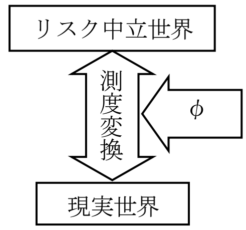


図 7 リスク中立世界と現実世界

されたが，(3.5)式では現実世界とリスク中立世界を (3.2)式を決定する際，パラメータはボラティリティ σ のみである(υ は σ から計算できる)．したがってリスク中立モデルではリスクの市場価格を求めなくても，債券やオプションの価格計算が可能である．

現実確率のモデルは，(3.5)を(3.4)に代入して

$$\begin{aligned}df(t,T)=\sigma(t,T)\cdot(-\upsilon(t,T)+\phi(t))dt\\ +\sigma(t,T)\cdot dZ\end{aligned} \quad (3.7)$$

の形で表される．金利のヒストリカルデータから σ を推定し，ϕ がわかれば dZ に正規乱数を適用してフォワードレートのシミュレーションができる．これを金利のリアルワールドシミュレーションというが，以下では短くして **RW シミュレーション**と表す．

state price deflator $\xi(t)$ は次式の解として与えられる．

$$d\xi/\xi=-rdt-\phi\cdot dZ \quad (3.8)$$

ここで $\xi(0)=1$ である．2.6 節で述べたように，$\xi(t)$ を計算すれば，現実確率モデルで価格計算もできる．

ところで，$\phi=0$ という仮定をリスク管理の論文でよくみかけるので，この意味を確認しておきたい．このときは（3.5）より

$$Z^*(t)=Z(t)$$

である．つまり $\phi=0$ の仮定はリスク中立確率のモデルと同じであることに注意したい．また $\phi=0$ のとき，

$$d\xi/\xi = -r(t)dt$$

なので，

$$\xi(t) = \exp\left\{-\int_0^t r(s)ds\right\}$$

である．これは savings account の逆数に等しい．

リスク中立確率は実用に便利な概念である．近年では，はじめからリスク中立世界で HJM モデルを説明する金利モデルの教科書が現れるようになった. 例えば, Hunt-Kennedy[2004]，Brigo-Mercurio [2006]，Gatarek et al.［2007]などがそうである．

リスクの市場価格をどのように計算するのか？これは古くて基本的な問題だが，筆者の知る限り，教科書では扱われていない．その一方で金利リスクを評価する研究は少なくない．それらはどのように現実確率下で計算しているのかと興味深々で読んでみると，初めは現実確率下で問題を定式化しているが，計算時には便宜上

リスクの市場価格 ＝ 0

と仮定しているものばかりである．これはリスク中立確率で計算しているのと同じで，だまされたような気になるが，それが金融工学の限界として合意形成されてきたともいえる．むしろ，その論文を読んで，ϕ=0 でよいのかと安心した人のほうが多いかもしれない．

3.2 リスクの市場価格の推定の先行事例

リスクの市場価格を推定するにあたり，考えられるアプローチは債券価格データから求める方法と，金利データから求める方法である．前者のアプローチによる研究はあまり見ない．その理由は債券価格過程のパラメーターを推定しにくいからであろう．

金利データからリスクの市場価格を推定した研究はいくつかある．Stanton[1997]は短期金利モデルで満期の異なる 2 つの債券の利回りのヒストリカルデータから，リスクの市場価格の近似式を導いた．そして短期金利とリスクの市場価格の関係を分析している．この論文は短期金利モデルの構造に依存したアプローチをとっており，マルチファクターのフォワードレートモデルには一般化しにくい．RW シミュレーションの研究を一般性のある議論として展開するにはフォワードレートモデルのフレームワークでリスクの市場価格を求めることが必要である．

比較的最近のものでは，Dempster et al.[2010]が 3 ファクター（短期金利，長期金利，金利のスロープ）のバシチェックモデルで，リスクの市場価格を推定している．この方法はヒストリカルデータの扱い方がわかりやすい．推定のアルゴリズムにカルマンフィルターを使っているので，統計解析ソフトが必要である．しかし統計解析ソフトを使うと，アウトプットされた数値の意味を理論的に考察できない．

RW シミュレーションの研究をブレークスル―するには，解析的な計算法の研究が重要な鍵になる．

4 リスクの市場価格とＲＷシミュレーション

この章では，HJM モデルでリスクの市場価格を求めるひとつの考え方を示し，その結果として導かれる RW シミュレーションの性質を説明する．この中で，シミュレーションについては，短期の 1 期間モデルを考える．長期のモデルは 1 期間モデルを多期間化することになるが，ボラティリティの期間構造やリスクの市場価格をどのように考えるかはエンジニアリングの課題である．

この章でも実用向けの説明とするため，結果の意味と使い方の説明に重点をおく．詳細なロジックを追いたい方は Yasuoka[2015]を参照のこと．また専門家向けの話が多くなるので，RW シミュレーションの性質を知りたいだけの人は 4.2 節から読めばよい．LIBOR マーケットモデルの場合は金利モデルのフレームワークが異なるので，理論も計算も複雑になるが，考え方や結果の性質は HJM モデルと基本的に同じである．詳しくは Yasuoka[2012, 2013]を参照のこと．

4.1 最小２乗法によるリスクの市場価格の推定

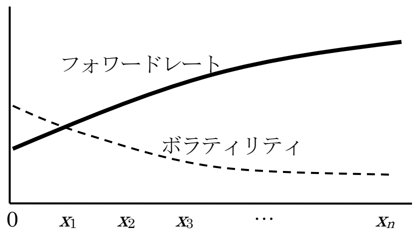


図８　フォワードレートと
ボラティリティの期間構造

HJM モデルでボラティリティ $\sigma(t,T)$ が t と T の確定的な関数のものをガウシアン HJM モデルという．以下では $\sigma(t,T)$ は t と T について確定的かつ連続で，リスクの市場価格は観測期間中で一定と仮定する．このとき，(3.7)はオイラー積分によって次式で離散化できる．

$$\Delta f(t,T) = (-\sigma(T)\cdot\upsilon(t) + \sigma(T)\phi)\Delta t + \sigma(T)\Delta Z \quad (4.1)$$

n 個の債券の満期日を T_i, $i=1,2,\cdots,n$ で表す．$x_i=T_i-t$　とおくと，x_i は債券の満期日までの期間の長さである．日常的に金利曲線やフォワードレートは図８のように，横軸に x_i を表しグラフ化して観察している．観測日を t_k, $k=1,\cdots,J+1$ とし，$\Delta t=t_{k+1}-t_k$ は定数とする．各観測日のフォワードレートを $F(t_i, x_j)$, $i=1,\cdots,J+1$, $j=1,\cdots,n$ で表すと，(4.1)から

$$\begin{aligned}&F(t_{i+1}, x_j-\Delta t) - F(t_i, x_j)\\ &\quad= (-\sigma_j\cdot\upsilon_j + \sigma_j\cdot\phi)\Delta t + \sqrt{\Delta t}\sigma_j\cdot Z(1)\end{aligned} \quad (4.2)$$

となる．ここでは簡単のため

$$\sigma_j = \sigma(0,x_j), \qquad \upsilon_j = \upsilon(0,x_j)$$

と記した．本来なら $\sigma(t,T)$ の変数 T は満期日という時刻を表すが，上は満期日までの時間の長さ x の関数とみている．これ以降は $\sigma(t,T)$ や $f(t,T)$ などの第２変数は，観測データについては x_i で表し，シミュレーションモデルを扱うときは T_i で表す．この違いを正確に記述するとかえってわかりにくくなるので，文脈で解釈していただきたい．

金利やボラティリティの観測は満期までの期間 $x=T-t$ の関数として行うのが一般的だが，HJM モデルは債券の満期日 T による定式化が行われているため，観測ベースの計算式を表しにくい．クリアに記述するには x を第２変数にもつモデル，いわゆる Musiela 方程式（Brace-Musiela [1994] あるいは Bjork [2004]を参照）のほうが扱いやすいが，HJM フレームワークのほうがわかりやすいので，ここでは HJM モデルで議論を展開する．

ボラティリティがわかっていれば(4.2)の未知数は ϕ だけである．$\phi=(\phi_1,\cdots,\phi_d)$ は x_j に依存しないので，すべての t_k, x_j で(4.2)を満足する $\phi=(\phi_1,\cdots,\phi_n)^T$ を求めたい．実際のデータでこれを満たすことは不可能なので，近似的に ϕ を推定する．本稿では最小二乗法による ϕ の導出について説明する．最小二乗法では解析解を得る可能性があることと，その解析解の意味を分析できるという魅力がある．

(4.2) 式の両辺の誤差のすべての満期 x_i についての二乗和をとり，その観測期間平均は次のようになる．

$$\begin{aligned}\varepsilon(\phi) = \frac{1}{J}&\sum_{k=1}^{J}\sum_{i=1}^{n}\\ &\left\{\Delta F(t_k, x_i) + (\sigma_i\cdot\upsilon_i - \sigma_i\cdot\phi)\Delta t\right\}^2\end{aligned} \quad (4.3)$$

ここで

$$\Delta F(t_k, x_i) = F(t_{k+1}, x_i - \Delta t) - F(t_k, x_i) \quad (4.4)$$

である．そしてリスクの市場価格を(4.3)の最小二乗解とする．この問題を d ファクターモデル($1 \le d \le n$)で考えよう．$(\sigma_1,\cdots,\sigma_n)$ は $d\times n$ 行列で，ランクは d としてよい．このとき次を得る．

命題.1　$\varepsilon(\phi)$ の最小二乗解はユニークに存在し，次の連立方程式の解で与えられる．

$$\sum_{m=1}^{d}\left\{\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^m\sigma_i^l\right\}\phi_m = \sum_{i=1}^{n}\gamma_i\sigma_i^l, \quad l=1,\cdots,d \quad (4.5)$$

ここで

$$\gamma_i = \mathrm{E}^H\left[\Delta F(\ , x_i)/\Delta t\right] + \sigma_i\cdot\upsilon_i \quad (4.6)$$

であり，$\mathrm{E}^H[\ ]$ は時系列データの観測期間平均であ

る．

証明(概略)　ε の ϕ_i, $i=1, 2,\cdots,n$ によるヘッシアンを計算すると，正定値であることがわかる．したがって最小二乗解がユニークに存在する．その解は $\nabla\phi=0$ の解に等しいので，これを具体的に計算すると(4.5)式の形で表すことができる．

(4.5)式はリスクの市場価格を直接的に明示していないので, 大して面白い結果には見えないが, RW シミュレーションの研究を展開する上で重要なマイルストーンになる．具体的な応用については次節以降で説明する．

4.2 フルファクターモデルでの RW シミュレーション

金利モデルの研究は 1 次元のモデルから始まり，高次元モデルに発展してきたことはよく知られている．そのような流れとは逆に，ここではもっとも高次元のモデルから議論を始めるので，その理由を簡単に説明しておきたい. 筆者は RW シミュレーションで何が起きるのかをさまざまなケースで計算を繰り返し，RW シミュレーションには金利のヒストリカルな挙動を再現する傾向があることに気づいた．その理由を統計的に検証するか理論的に解明するかの二通りの研究アプローチがあるが，もっとも高次元のモデルを考えることにより理論的に説明できることがわかった．未解決の問題を高次元化して解決した例は数学ではよくあることである．そのようなことから高次元のモデルで理論的な考察を行い，実用につかう低次元のモデルの性質を近似的に説明するというアプローチをとる．

4.1 節の設定の下で，n ファクターモデルを**フルファクターモデル**と呼ぶことにする．たとえば，フォワードレートの満期 T_i を半年ごとに設定し，10 年まで考えれば，$n=20$ である．このときのフルファクターモデルは 20 次元のモデルである．

命題 2　フルファクターモデルで，$(\sigma_1,\cdots,\sigma_n)$ はランク n の行列で，各 σ_i は互いに直交していると仮定する．Δs を微小時間とすると，$f(\Delta s,T_i)$ は次式でシミュレーションできる．

$$
\begin{aligned}
f(\Delta s,T_i) &= f(0,T_i) \\
&\quad + \mathrm{E}^H\left[\Delta F(\ ,T_i)/\Delta t\right]\Delta s + \sqrt{\Delta s}\,\sigma_i\cdot Z(1)
\end{aligned}
\qquad (4.7)
$$

証明（概略）　$\nabla\phi=0$ を具体的に展開すると，$\{\sigma_1,\cdots,\sigma_n\}$ が R^n の直交基底であることから，

$$
-\sigma_i\cdot\upsilon_i+\sigma_i\cdot\phi=\mathrm{E}^H\left[\Delta F(\ ,T_i)/\Delta t\right]
$$

がわかる．これを(4.2)に代入すると，シミュレーションモデルを(4.7)の形で表すことができる．

この命題は 2 つの意味をもつ．ひとつはリスクの市場価格を計算しなくても RW シミュレーションモデルを構成できることである．資産価格を計算するにはリスクの市場価格を求め，state price deflator を計算する必要があるが，金利シナリオの生成だけなら(4.7)式のモデルで十分である．

もうひとつは(4.7)式から RW シミュレーションの性質がわかることである．(4.7)式の右辺第 1 項は初期値，第 2 項はドリフト項，第 3 項は拡散項である．拡散項はリスク中立モデルと同じなので，RW シミュレーションはドリフト項で特徴づけられることになる．ドリフト項の $E^H\left[\Delta F(\ ,T_i)/\Delta t\right]$ は過去の金利変動の平均なので，トレンドの意味を持つ. トレンドの考え方については 4.4 節で詳しく説明する．

金利変動の主成分分析を行い，拡散項のボラティリティに主成分を使えば，それは互いに独立なのでフルファクターモデルを構成できる．命題 2 から，RW シミュレーションは観測期間の金利のトレンドとボラティリティを再現することがわかる．従来のヒストリカルシミュレーションや主成分によるモデルとの決定的な違いは無裁定価格の計算ができる点である. これは 2.3 節の現在価値で VaR を測る話とも関連している．

フルファクターモデルは実用的でないと感じるかもしれないが，そうではない．例えばハルホワイ

トモデルは１次元のフルファクターモデルと考えてよいからである．これについては 5.2 節で詳しく扱う．同様にしてネルソン．シーゲルモデルなどへの応用も可能である．

フォワードレートモデルでは短いものでも $n=20$，長いものだと $n=60$，80 のものを扱う．このようなケースでも，3 ファクターで十分フルファクターモデルを近似できることを我々は経験的に知っている．したがって低次元化したモデルの性質も命題 2 で近似的に説明できるのである．

4.3 リスクの市場価格の推定

命題２はリスクの市場価格を具体的に導いてはいないが，仮定はボラティリティの各成分が互いに直交していることだけである．とくにボラティリティに主成分を使う場合を考えると，リスクの市場価格の式を具体的に表すことができる．その結果を示す前に，主成分分析，固有値，ボラティリティなどの関係を手短かにまとめておく．主成分分析の基礎については多変量解析の教科書が夥しく出ているのでそれら参照のこと．

フォワードレートの時間当たりの変動から導かれる $n\times n$ の共分散行列 V_{ij} を次式で定義する．

$$V_{ij}=Cov(\Delta F(t_k,x_i),\Delta F(t_k,x_j))/\Delta t$$

V_{ij} のランクは $d\,(d\le n)$ 以上とする．このとき $(\rho_l)^2$ を l 次の固有値，$e^l=(e^l_1,\dots,e^l_n)$ を l 次固有ベクトルとし，$e^l_1>0$,仮定する．この仮定の理由は 4.4 節で説明する．また ρ_l はプラスでもマイナスでもよいが，l 次主成分のノルム（ベクトルの長さ，大きさを表す概念）の意味で使いたいのでプラス値とし，$\rho_l>0$ と仮定する．固有ベクトルは互いに直交することを思い出しておきたい．さらに $|e^l|=1$ とする．また本稿では固有ベクトルを主成分と呼ぶことにする．

このとき V_{ij} は

$$V_{ij}=\sum_{l=1}^{d}e^l_i\rho_l^2e^l_j$$

と分解できる．主成分の累積寄与率 C_k，($k\le d$) は次式で定められる．

$$C_k=\sum_{l=1}^{k}\rho_l^2\Big/\sum_{l=1}^{d}\rho_l^2$$

また l 次のボラティリティ $\sigma^l(0,x_i)$は

$$\sigma^l(0,x_j)=\rho_le^l_i \tag{4.8}$$

である．

次の命題はリスクの市場価格を解析式で与える．

命題 3 ボラティリティに主成分を使う d ファクターモデルにおいて，リスクの市場価格 ϕ は次式で与えられる．

$$\phi_l=\zeta_l/\rho_l \tag{4.9}$$

ここで

$$\zeta_l=\sum_{i=1}^{n}\gamma_ie^l_i\ . \tag{4.10}$$

証明（概略） 命題 2 の連立一次方程式(4.5)の両辺に(4.8)を代入して添え字 l，m について展開する．主成分は R^d の正規直交基底なので，左辺は $(\rho_l)^2\phi_l$ に等しい．右辺は $\rho_l\sum_{l=1}^{n}\gamma_ie^l_i$ に整理できる．これは $\rho_l\zeta_l$ に等しいので

$$(\rho_l)^2\phi_l=\rho_l\zeta_l$$

を得る．両辺を $(\rho_l)^2$ で割れば(4.9)を得る．

(4.10)から ζ_l は γ の l 次主成分への射影，つまり γ の l 次主成分スコアである．このことから ζ_l を l 次の **MPR スコア**と呼ぶ. (4.8)から ρ_l は l 次ボラティリティ σ_l のノルムを表すので，これを**ボラティリティリスク**と呼ぶことにする．したがって命題 3 は，リスクの市場価格はボラティリティリスクあたりの MPR スコアであることを表している．

注 命題１は最小二乗問題の解を示してのみであり，リスクの市場価格の推定という意味で統計的な裏付けを与えているものではない．一方，命題３の解はリスクの市場価格の最尤推定値になることがいえる．これについては別の機会に報告したい．

4.4 リスクの市場価格の正負と解釈

命題３を使い，さまざまなケースでリスクの市場価格がプラスかマイナスかを調べたが，場当たり的な計算を繰り返すだけではもっともらしい仮説には至らなかった．ところが（4.9）式の右辺つまりMPR スコアの構造を調べると，興味深い解釈を導くことができる．

リスクの市場価格の古典的な意味は債券の単位リスク（ボラティリティ）あたりの超過リターンであった．これは資産運用の世界でのシャープレシオに相当する．この節では投資のリターンとリスクとの関連でリスクの市場価格の解釈を考える．

命題３(4.9)式の分子はMPRスコアζで表されている．ζの性質をみるために二つの概念を定義する．まずフォワードレートの **observable trend** を次式で定義する．

$$\mathrm{E}^H\left[\left\{F(\,t_{k+1},x_i)-F(\,t_k,x_i)\right\}/\Delta t\right]$$

これは観測期間の開始日と最終日の金利差を１年当たりの変化で表した

$$\left\{F(t_{J+1},x_i)-F(t_1,x_i)\right\}/J\Delta t$$

に等しい．したがって満期 x_i のフォワードレートが観測期間中上昇していれば observable trend はプラス値であり，下降していればマイナスである（図 9）．つまり observable trend はフォワードレート曲線の視覚的な動きを表している．

次に **rolled trend** を次式で定義する．

$$\mathrm{E}^H\left[\Delta F(\quad,x_i)/\Delta t\right]$$

これは

$$\mathrm{E}^H\left[\left\{F(t_{k+1},x_i)-F(t_k,x_i)\right\}/\Delta t\right]$$
$$+\,\mathrm{E}^H\left[\left\{F(t_{k+1},x_i-\Delta t)-F(t_{k+1},x_i)\right\}/\Delta t\right]$$

に分解できる．第１項はobservable trendに等しく，第２項はフォワードレート曲線の勾配である．例えばフォワードレート曲線が順イールドで，変動しないとき，第１項はゼロで第２項はマイナス，つまりrolled trend はマイナス値である．これはフォワードレートのロールダウンを表している（図 10）．順イールドのフォワードレートが急上昇するとき，第２項はマイナス値だが，第１項は大きくプラスとなり，全体で rolled trend はプラスになる．これはロールアップと呼ばれている現象である．

rolled trend は時間経過とともに債券の満期が近付く効果を織り込んだ金利変化を表している．つまり，満期 $x_i\text{-}t$ の債券を保有しているときの市場利回りの変化である．例えば３年債（x_i=3）を購入すると，１年後（t =1）は残存２年（3-1=2）の債券になる．購入時は３年の金利をみているが，１年後は２年の金利と比較してその債券の価値を考えることに対応している．

これらの準備のもとで命題２を見直すと，これはRW シミュレーションのドリフトが観測期間中のrolled trend として再現されることを意味している．さらに次の命題はリスクの市場価格も rolled trendで近似的に説明できることを示す．

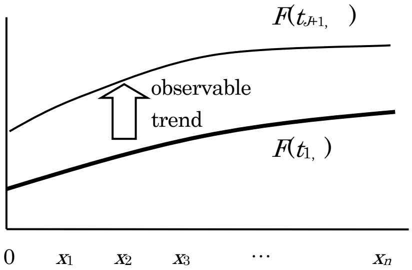


図９ フォワードレートの変化と Observable trend

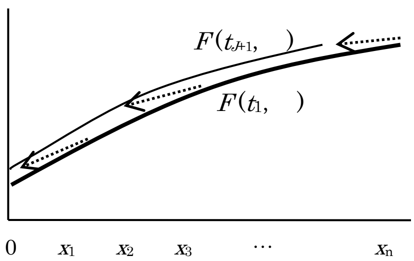


図10 フォワードレートのロールダウン

命題 4　ボラティリティが主成分で与えられている d ファクターモデルを考える（ $d \leq n$ ）．すべての i で

$$|\sigma_i \cdot \upsilon_i| << \mathrm{E}^H[\Delta F(\,,x_i)/\Delta t] \tag{4.11}$$

が成立しているとき，MPR スコアとリスクの市場価格はそれぞれ次で近似できる．

$$\zeta_l \approx \textstyle\sum_{i=1}^n \mathrm{E}^H[\Delta F(\,,x_i)/\Delta t] e_i^l \tag{4.12}$$

$$\phi_l \approx \frac{1}{\rho_l} \textstyle\sum_{i=1}^n \mathrm{E}^H[\Delta F(\,,x_i)/\Delta t] e_i^l \tag{4.13}$$

証明　(4.11)を(4.6)と(4.10)に代入すると(4.12)を得る．これを(4.9)に代入すれば(4.13)がわかる．

σ は金利のボラティリティで，υ は債券価格のボラティリティである．σ と υ の内積は経験的に小さな値をとることが知られているので，条件(4.11)はおおむね成立すると考えてよい．この結果，(4.12)から MPR スコアはフォワードレート曲線の rolled trend の主成分スコアにほぼ等しいことがわかる．

フォワードレートの変動の主成分分析では，1 次主成分はフォワードレートの平行移動を表し，2 次主成分はスロープ，3 次主成分はカーブを表すことが経験的に知られている．このとき，4.3 節で $e^l{}_1 > 0$ と仮定したことの意味を直観的に表すと図 11 のようになるが，実際の主成分分析では成分によっては逆符号で出力される場合がある．例として 2 次主成分で説明すると，2 次主成分は図 11 では右下がりの曲線だが，これを上下反転させた右上がりの形で出力されることがあるということである．(4.9)と(4.10)から，主成分の現れ方次第で MPR スコアとリスクの市場価格の符号が反転することになり，これではリスクの市場価格のプラスマイナスを議論できなくなる．マルチファクターモデルでリスクの市場価格のプラスマイナスを議論するには主成分の符号を決めておくことが必要なのである．$e^l{}_1 > 0$ と仮定したのはこの理由による．実際の計算時には各主成分の数値をみて $e^l{}_1 > 0$ となるように正負を反転させればよい．

ここで本題に戻って命題 4 の意味を説明しよう．フォワードレート曲線が全般的に低下するときや，順イールドの状態が続くときは，フォワードレート曲線の全期間でロールダウンするので，rolled trend は全体でマイナスである．命題 4 から MPR スコアは rolled trend の主成分スコアで近似できるので，1 次の MPR スコアはマイナス値になる．短期から長期までの債券を均等に保有する投資家にとって，これは超過収益機会であり，1 次の MPR スコアは超過収益の大きさを表していると解釈できる（図 12）．その投資家にとってのリスクは全期間の金利上昇であり，その大きさはボラティリティの 1 次成分 σ_1 のノルム ρ_1 で表される．リスクの市場価格の 1 次成分は命題 4 から

$$\phi_1 = \zeta_1 / \rho_1$$

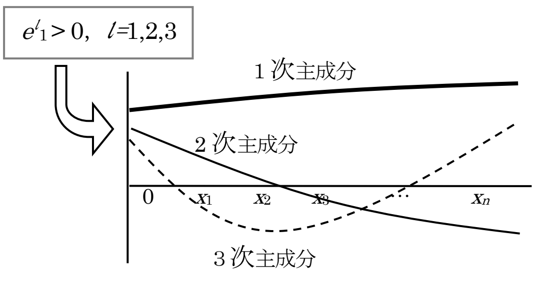


図 11　$e^l{}_1 > 0$ のときのフォワードレートの主成分

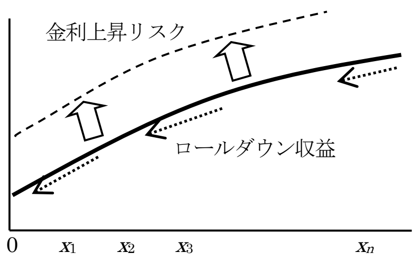


図 12　ϕ_1 は債券投資家にとってのロールダウン収益と金利上昇リスクの比

であり，これは全期間の満期の債券を均等に保有する投資家にとってのリスクとリターンの比を表していると解釈できる．

2 次の MPR スコアやリスクの市場価格についても同様に解釈できる．フォワードレート曲線がスティープニングすると，上で説明したことからζ_2はマイナス値になり，フラットニングのときζ_2はプラスである．金利曲線のブル．ベアやスティープニングなどの変化のパターンや背景についてはたとえば安岡[2012]を参照のこと．(4.9)からϕ_2の符号もζ_2と同じである．フラットニングは短期債を売り，長期債を買っている投資家にとっての超過収益機会であり，スティープニングはそのリスクである（図 13）．そのリスクの大きさはσ_2のノルムρ_2で表される．つまりリスクの市場価格の 2 次成分は短期債を売り，長期債を買っている投資家にとってのフォワードレート曲線の傾きの変化に対する超過リターンとリスクの比を表している．

同様にして，3 次のリスクの市場価格は，3 次主成分，すなわちフォワードレート曲線のカーブの変化を超過収益機会とする債券投資家にとってのリスクリターンの比を表している．たとえば債券やスワップ金利のバタフライスプレッドを取りに行く投資戦略を考えればよい．

4 次以上も同様で，フォワードレート曲線の様々な変化を超過収益機会とする投資家にとってのリスクとリターンの比を表す．現実には 4 次以上のフォワードレート曲線の変化にかける投資ストラテジーは存在しないかもしれない．我々の結果はフォワードレートモデルの枠組みで考える以上，高次のリスクの市場価格にも，フォワードレート曲線の変化の高次主成分との関係で理論上の解釈を与えることができるということである．

従来，リスクの市場価格は何らかの状態変数（たとえば短期金利）との関係で研究されてきた（Stanton[1997]など）．しかし命題 4 は，ϕ のすべての成分が「状態」ではなく「状態変化のトレンド」によって決まることを統一的に説明している．rolled trend より observable trend のほうが視覚的にとらえやすいので，命題 4 を observable trend との関係で考えると，さらにわかりやすくなる．

つまり observable trend は rolled trend に性質が近いので，フォワードレート曲線の変化(observable trend)を近似的に rolled trend とみなせば，リスクの市場価格の値を金利の変化からある程度推定できる．ボラティリティが極端に過大でなければ命題 4 の条件(4.11)は満たされると考えてよい．その結果，表 2 は観測開始日のフォワードレート曲線の形状とその後の金利変化の組み合わせに対する 1 次のリスクの市場価格 ϕ_1を推定したものである．例えば初期フォワードレートが順イールドで，金利が低下する局面ではこの表の最も左上の枠で ϕ_1 がマイナス値であることを示している．

表 3 は初期のフォワードレートが順イールドで，その後の金利変化を平行移動とスロープの変化の組み合わせに対してϕ_1, ϕ_2 を推定したものである．

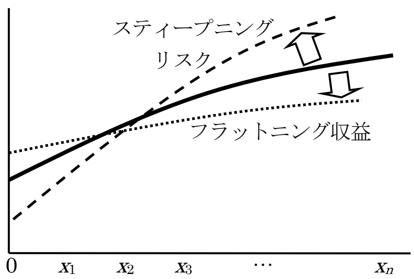


図 13　ϕ_2 は短期債売り長期債買の投資家のリスクとリターンの比

表 2　金利の observable trend とリスクの市場価格

ϕ_1	Observable trend: Falling	Stable	Rising
Upward sloping	Negative	Negative	Near zero
Flat	Negative	Near zero	Positive
Downward sloping	Near zero	Positive	Positive

例えば金利がベアフラットするとき ϕ_1 はゼロ値に近く，ϕ_2 はプラス値であることを一番下の行で示している．

注意したいのは，トレンドが早いときやフォワードレート曲線が変化しない場合は observable trend と rolled trend に違いが現れることである．その場合は上の表では十分説明できないので注意しておきたい．例えば，金利上昇局面では経験的に順イールドである．このような場合，表 2 の該当枠（右上）では Near zero としているが，図 14 のように金利上昇が早い場合は全体の rolled trend がプラスになり，ϕ_1 がプラス値を取る可能性がある．例えば，フォワードレートは「市場参加者が予想する将来の金利」という解釈（純粋期待仮説）があるが，その予想より早く金利が上昇するケースである．このケースこそ金利リスク管理では着目しなければならない．そのような事例がまったくないと言い切れない限り，2.1 節 b）の考え方を安易に受け入れることはできない．

表 3　金利の observable trend と初期フォワードレートに対するリスクの市場価格

		Market price of risk	
		ϕ_1	ϕ_2
Observable trend	Bull steep	Negative	Negative
	Steep	Negative	Negative
	Bear steep	Near zero	Negative
	Bull flat	Negative	Positive
	Flat	Negative	Positive
	Bear flat	Near zero	Positive

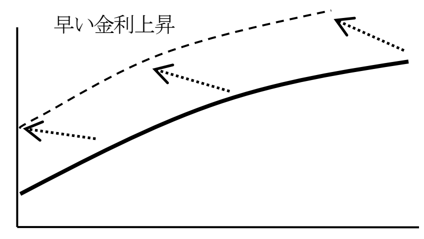


図 14　金利上昇が早いとき，ϕ_1はプラス

4.5 RW シミュレーションとリスク中立シミュレーションとの違い

前節までの議論で RW シミュレーションを実現できるところまで話を進めた．次に RW シミュレーションとリスク中立シミュレーションの違いを考える．その違いを確かめることによって，RW シミュレーションをリスク中立シミュレーションに置き換えてよいかを議論できる．手の早い人なら考えるより先にモデルを作り，モンテカルロシミュレーションを実行して結果を比較するかもしれない．筆者も先に計算を試みた部類に入るが，廻り道になるので経験知としてお勧めしない．

リスク中立確率下でのシミュレーションモデルは(3.4)から

$$f(\Delta s, T_i) = f(0, T_i) - \sigma_i \cdot \upsilon_i \Delta s + \sqrt{\Delta s}\,\sigma_i \cdot Z^*(1)$$

で表される．P と Q は別物なので上式と(4.16)を直接比較することは出来ない．またリスク中立確率も無数に存在するので，混乱を避けるため，ここではスポットメジャー下でのリスク中立モデルだけを考えることにする．3.1 節で，現実確率モデルで $\phi=0$ とおくと，スポットメジャーによるリスク中立モデルと同じ形になることを説明した．その意味で上の Z^* を Z に置き換えることができ，確率測度 P の下で RW シミュレーションとリスク中立シミュレーションの比較が可能になる．その前提で上式を(4.16)と比較すると，違いはドリフト項だけである．したがってフォワードレートの期待値を比較すれば二つのモデルの違いがわかる．拡散項の期待値はゼロなので次の命題を得る．

命題5　命題 2 と同じ条件のとき，$f(\Delta s, T_i)$の現実確率 P とリスク中立確率 Q での期待値はそれぞれ次式で与えられる．

$$\mathrm{E}_p\left[f(\Delta s,T_i)\right]=f(0,T_i)+\mathrm{E}^H\left[\Delta F(\ ,T_i)/\Delta t\right]\Delta s \quad (4.16)$$

$$\mathrm{E}_Q\left[f(\Delta s,T_i)\right]=f(0,T_i)-\sigma_i\cdot\upsilon_i\Delta s \quad (4.17)$$

ここで $\mathrm{E_P}[\ \ ]$，$\mathrm{E_Q}[\ \ ]$ はそれぞれ P, Q での期待値である．また $f(\Delta s,\ T_i)$ は P と Q の下で正規分布に従い，標準偏差は等しく

$$\sqrt{\Delta s\sum_{l=1}^{n}\left(\sigma^{l}{}_{i}\right)^{2}}$$

で与えられる．

とくにσ=0 のとき，つまり金利変動がない場合を考えてみよう．このときリスク中立シミュレーションでは(4.17)より

$$\mathrm{E_Q}\left[f(\Delta s,T_i)\right]\approx f(0,T_i) \quad (4.18)$$

で近似できる．左辺の $f(\Delta s,\ T_i)$ は満期までの時間が $T_i-\Delta s$ に短くなっていることに注意したい．たとえば１年後の金利を１期間モデルでシミュレーションする場合，Δs =1 である．$f(\Delta s,\ T_i)$ は満期までの期間が T_i−1 年である．その金利の平均が満期 T_i 年の初期金利に等しいことを意味する．その結果，図 15 に示すように，Δs 後のフォワードレートの期待値は初期値のフォワードレート曲線を左に Δs 平行移動した形になる．フォワードレート曲線が順イールドのときは，金利曲線が高めにドリフトすることにもなる．

一方(4.16)の右辺第 2 項をみると，RW シミュレーションでは rolled trend の変化が起きた状態になる．たとえば順イールドで金利変動がないとき，フォワードレート曲線は全期間でロールダウンする．このケースでのシミュレーションの期待値は細実線のようになり，フォワードレート曲線の形はあまり変化しない．

金利安定期のヒストリカルデータを使って将来の金利をシミュレーションする場合も，将来の金利は現在のフォワードレートを中心として変動すると考えるのは自然である．RW シミュレーションは経験的な感覚に合うモデルなのである．

フォワードメジャー下でのシミュレーションと RW シミュレーションの違いはどうかという疑問も実務レベルでは存在するはずである．これらを直接比較するとわかりにくくなるので，フォワードメジャーとスポットメジャーでのドリフトの違いを把握すればよい．これは金利モデルの専門家ならたやすい話なので，ここでは省略する．

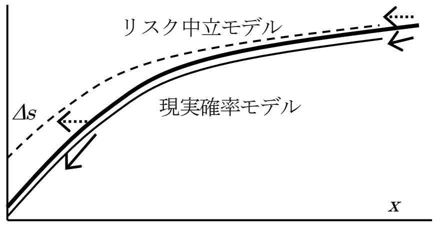


図 15　σ=0 のときの $f(\Delta s,\ T_i)$の期待値
実線は初期値

5 RW シミュレーションの方法

5.1 モデルの選択

RW シミュレーションに使う金利モデルの選択は，リスク管理の目的，立場，技術力などによって異なる．この節ではエンジニアリングの観点で何を選ぶかを目的別にまとめておきたい．金利モデルのモデルリスクについては長く現場で議論されてきたことなので，それについては触れない．

ここでの選択肢はガウシアン HJM（ハルホワイトモデル含む）と LIBOR マーケットモデルである．金融機関によっては金利が正の短期金利モデルとしてコックス・ロス・インガーソルモデルやブラック・カラシンスキーモデルなどを使いたい人もいる．これらは HJM モデルの一種だがガウシアンタイプではない．研究が十分広がっていないので，本稿の選択肢としては 1 ファクターLIBOR マーケットモデルを選ぶことになる．

以下に述べる内容はひとつの考え方であり，金融機関によっては，既存システムとの関係や持てる時間といった制約の中でベストプラクティスを決めることになる．

①ALM

ALM の方針によるが，扱う資産と債務の規模が

大きいので，結果のわかりやすさという意味で１ファクターモデルから始めることになる．モデルの普遍性を重視する場合は，ボラティリティに経済学的な解釈をもつものを使う考え方がある．そして金利上昇リスクに注目するケースではハルホワイトモデルが使われる．これは正規分布型のモデルでマイナス金利が現れるため，金利低下リスクにも注目する場合は１ファクターLIBOR マーケットモデルを使う．モデルの普遍性を重視する場合は，長期的な観点でボラティリティを推定することが必要であろう．とくに高次元のモデルを使う場合は観測期間に固有な金利変動の特徴を捉えすぎる懸念（説明過剰性）がある点に注意が必要である．

②債券や仕組債ポートフォリオのリスク管理

短期的なリスク管理目的で，直近の金利変化のパターンをモデル化したい場合は高次元の LIBOR マーケットモデルを使う．オプション性の債券が多く，ネステッドシミュレーションのように負荷の大きな計算では，1 ファクターモデルが使われているようである．この場合も金利低下リスクが大きいときは１ファクターLIBOR マーケットモデルを使う．

より簡単に評価したい場合や統合 VaR の評価で金利の上昇リスクだけを評価する場合は，ガウシアン HJM モデルでもよいであろう．

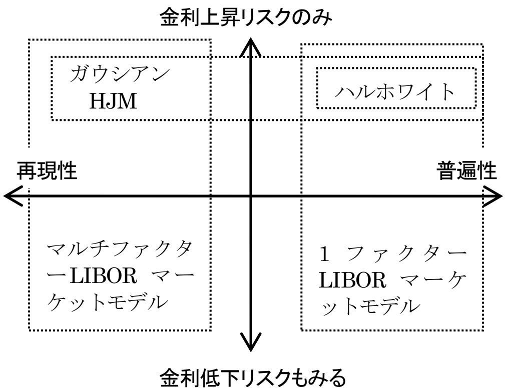


図 16　リスク管理の目的と金利モデル

③金利デリバティブのヘッジポートフォリオのリスク管理

保険会社や年金がこの目的で使うケースは少ないと思うが，金利デリバティブを扱っている金融機関では日常的な課題である．この場合は金利上昇だけでなく，金利低下も損失要因になるので，金利が正の LIBOR マーケットモデルを使う．短期的なリスク管理には様々なシナリオを扱える高次元のモデルを使う．

金利リスクの方向性と金利シナリオに求められる性質との関係で，使えるモデルを図 16 にまとめた．

また金利変動の主成分分析を行う際の重要な注意点を付録 2 節に記した．実装する場合は必ず目をとおしていただきたい．

5.2 ハルホワイトモデルによる RW シミュレーション

金利のエキゾチックオプションの計算に使われた初期の短期金利モデルにホーリーモデルとハルホワイトモデルがある．後者は短期金利のミーンリバージョン効果を反映でき，実用化された短期金利モデルの代表である．教科書ではバシチェックモデルの一種として扱われることが多いが，実用面での実績から金融機関ではハルホイトモデルの呼び方が定着している．

ハルホワイトモデルが金利リスク管理のためのモデルとして広く注目されている理由は，1 ファクターの短期金利モデルなので扱いやすいことと，ミーンリバージョンという恒常的な現象を取り込めることと考えられる．しかし短期金利のモデルを長短金利の変動リスク評価に使うことから，カリブレーションでミスリードしやすい懸念がある．この点についても詳しく説明したい．

ここでは HJM のフレームワークでハルホワイトモデルを記述し，RW シミュレーションの方法をエンジニアリングの観点で考える．マルチファクターのネルソン．シーゲルモデルへの応用も同じ考え方で展開できるであろう．

便宜上リスク中立モデルから話を始める．ハルホ

ワイトモデルでは短期金利過程を次式で表す．

$$dr = \kappa(\theta(t) - r)dt + \beta dZ^* \qquad (5.1)$$

ここで $\theta(t)$ は金利の平均回帰レベル，κ は平均回帰（ミーンリバージョン）係数で，金利 $r(t)$ が $\theta(t)$ からかい離したときに $\theta(t)$ に戻る力の強さを表す．β はボラティリティ，$\theta(t)$ はフォワードレートの初期値 $f(0,T)$ に対して

$$\theta(t) = f(0,t) + \frac{1}{\kappa}\frac{\partial}{\partial t}f(0,t) + \frac{\beta^2}{2\kappa^2}\frac{\partial}{\partial t}(1 - e^{-2\kappa t})$$

で与えられる．

一方，1 ファクターHJM モデルのボラティリティを

$$\sigma(t,T) = \beta e^{-\kappa(T-t)} \qquad (5.2)$$

とおくと，フォワードレート過程 $f(t,T)$ は

$$df(t,T) = -\beta e^{-\kappa(T-t)}\upsilon(t,T)dt + \beta e^{-\kappa(T-t)}dZ^*$$

である．ここで $\upsilon(t,\ T)$ は(3.3)で与えられる．このとき $r(t)$ は(5.1)で表されることが知られている．この結果，ハルホワイトモデルは HJM モデルの特殊ケースとして表されることがわかる．この詳細はたとえば Munk [2011]を参照のこと．

現実確率でのモデルは(3.5)の変換によって，

$$\begin{aligned} df(t,T) = &\left\{-\beta e^{-\kappa(T-t)}\upsilon(t,T) + \beta\phi e^{-\kappa(T-t)}\right\}dt \\ &+ \beta e^{-\kappa(T-t)}dZ \end{aligned} \qquad (5.3)$$

で表される．κ と β を推定し，これを 1 ファクターのフルファクターモデルとみなし，4 章の結果を適用すればよい．

κ と β の推定には 3 つのアプローチが考えられ，それぞれの方法と特徴について説明する．

a)短期金利の分布

ハルホワイトモデルでは，将来時刻 t での $r(t)$ の分散がわかるので，ヒストリカルな短期金利の分布からパラメータを推定できる．これは初期の金利モデルの研究でよく使われた方法であり，短期金利の変動リスクに注目する場合はこの方法でよいであろう．しかしリスク管理で長短金利の変動をモデル化したいなら，この方法には不適切さを感じる．その理由は後で説明する．

b)キャップの価格

格子モデルを作り，キャップレットの市場価格に整合するようにパラメータを決める方法である．これはオプションプライシングに使われる標準的な方法だが，短期金利の将来像で金利リスク評価をしてよいかは慎重に考えるべきであろう．a)も b)も短期金利の挙動をモデル化する考え方であり，a)は過去，b)は将来像を使うという違いがある．

c) 1次主成分

過去のフォワードレート曲線の挙動を (5.3) のボラティリティで近似して HJM モデルのフレームワークでモデル化する方法である．これはフォワードレート曲線全体（短期から長期までの金利）の動きに対するリスク評価に向いている．

これらの方法によるモデルの違いを説明する．短期金利のミーンリバージョンは常に観測されるので，a)の方法では κ はプラス値になるだろう．b)の方法では同じ日のマーケットデータでも，カリブレーションの方法によって κ がマイナス値になったりプラスになることが知られている．c)の方法ではどの期間の金利をみるかで κ の正負が変わる．推定の方法次第でボラティリティ構造がまったく異なる結果になるので，シミュレーションの目的と a), b)，c)の特徴をよく把握することが必要である．

次に c) の方法に従って主成分分析からボラティリティを決める方法と注意点を述べる．付録 2 節の補間などを使って ΔF を求め，主成分分析を行う．1 ファクターモデルでは 1 次主成分をハルホワイトモデルのボラティリティ (5. 2) で近似することになる．1 次主成分を

$$\sigma_i = \sigma(0,\ x_i), \qquad i = 1,\cdots,n$$

で表す．これを（5.2）の関数形で次式のように近似し

$$\sigma_i \approx \beta\exp(-\kappa x_i), \qquad i = 1,\cdots,n \qquad (5.4)$$

最小 2 乗法などで β と κ を推定する．

図 17 は日本円 LIBOR/swap 金利データからフォワード LIBOR を計算し，その変動の 1 次主成分の

例である．これを瞬間的フォワードレートとみなして（5.4）式で近似するとどうなるだろうか．フォワードレート曲線が右上がりなので κ はマイナス値であり，ミーンリバージョンと逆の現象が起きていることになる．一方，a）の方法で推定すると，経験的に κ はプラス値になるであろう．a）と c）の方法ではミーンリバージョン係数が異なるどころか，正負が逆の値になるのだ．b）の方法でも κ がマイナス値になりえる．ハルホワイトモデルであっても，パラメータ推定の方法次第でボラティリティの構造が全く異なるのである．

ではどの方法を使えばよいのだろうか．長短金利のヒストリカルな挙動をモデル化したいのであれば，a)，b)の方法より主成分分析の結果のほうが目的に適っている．しかしこの方法でも注意すべきことがある．たとえば図 18 の太実線で表したような１次主成分が現れたとしよう．このとき満期 3 年以下で（5.6）式の近似をすると，上と同じ理由で κ はマイナス値である．一方，10 年以下で考えると，

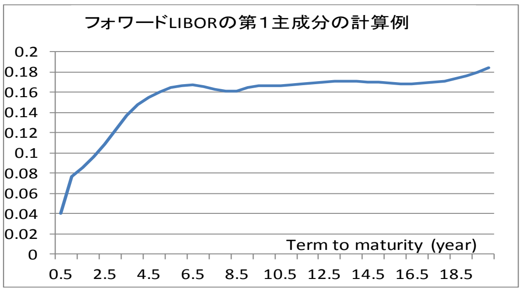


図 17 フォワード LIBOR の１次主成分の計算例
円 LIBOR/Swap 市場　2007/4/2-2009/8/3

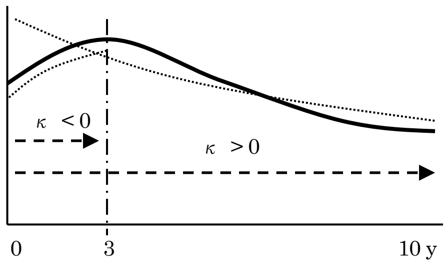


図 18　１次主成分と
ミーンリバージョン係数の符号

全体的に右下がりの曲線で近似されるので κ はプラス値である．したがってリスク管理で考える金利の期間の長さに合わせてパラメータを決めることが必要である．またミーンリバージョン係数 κ がマイナス値でも，キャップボラティリティではミーンリバージョンを意味していることがある．この現象に関して 90 年代後半，ハルホワイトモデルの実装で悩んだ人は少なくないはずである．それについて補足しておきたい．図 19 の実線のように短期のフォワードレートが低いとき，短期のフォワードレートの変動は長期のそれに比べれば小さい．そのときのボラティリティは同図の細実線のようになる．これは図 17 と同じ状況で，κ はマイナスである．このようなときでも，フォワードレート変化率のボラティリティ（キャップレットのボラティリティに相当）は破線のように短期のところで高く，長期に向けて低下するであろう．なぜなら変化率の分母にあたる短期のフォワードレートの値が小さいからである．このようなときは κ がマイナスでも金利の変化率（キャップレット．ボラティリティ）でみればミーンリバージョンが現れていることになる．

β，κ を推定した後の計算方法はテクニカルな内容になるので付録 4 節で概要を述べる．

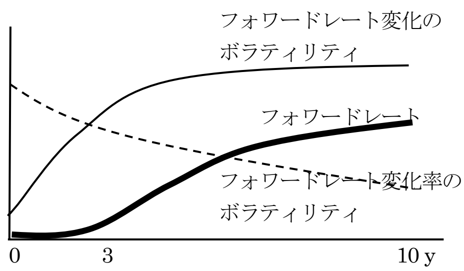


図 19　フォワードレート変化と変化率のボラティリティの違い

6 計算例

実際の金利データを使い，リスクの市場価格を計算し，これまで説明してきたことを確認する．2007 年 4 月 2 日から 2009 年 8 月 31 日までの日本円

LIBOR/swap 金利を無リスク金利とみなして計算する．金利変動のトレンドとリスクの市場価格の関係をみるために，2008 年 6 月 16 日以前を期間 A, それ以降を期間 B として, それぞれの期間で計算を行う．図 20 は x_i ＝0，2，5，10 年の 6 か月フォワード LIBOR の推移を示し，期間 A，B も記した．図 21 は観測期間の初日と最終日，および期間 A の最終日（期間 B の初日）の 3 時点のフォワード LIBOR 曲線である．図から期間 A の observable trend はベアフラット，期間 B ではブルスティープ化していることがわかる．

この計算では期間 6 か月のフォワードレートを瞬間的フォワードレートとみなす．Δt = 0.08（20 営業日)として付録(a.8)式の線形補間で ΔF を求め，主

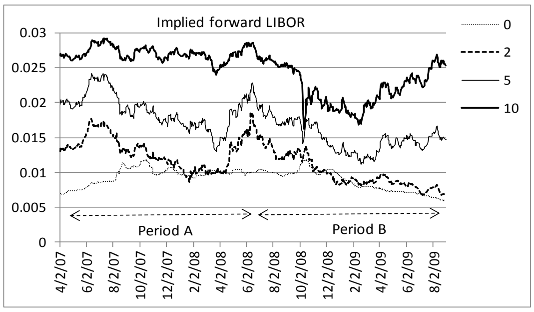
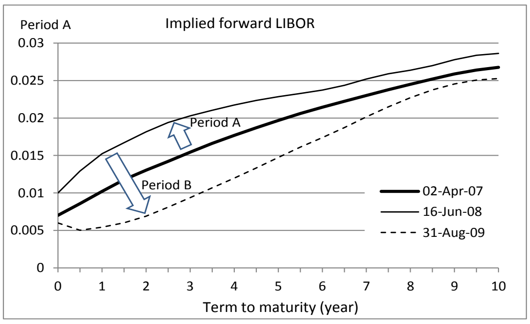


図 20　フォワード LIBOR と期間 A，B

スワップ金利はみずほ情報総研の提供．フォワードレートは筆者が計算

図 21　フォワード LIBOR 曲線
（2007/4/2，2008/6/16，2009/8/31）



成分分析を行った．4.5 節で注意したが，十分高い次数でリスクの市場価格を計算しなければならないので, この例では 8 ファクターモデルで計算した．表 1 に固有値と寄与率，リスクの市場価格 ϕ_j, J=1,…,6 を示す．どちらの期間も 3 次の累積寄与率 C_3 が約 99%であり, 4.5 節(4.16)式でシミュレーションするなら，3 ファクターでフルファクターモデルを十分近似できる．

期間 A でのリスクの市場価格は 1 次成分が －0.256，2 次成分が 0.532 である．表 2 のベアフラットの行をみると，1 次成分が near zero，2 次成分が positive で，表 2 の推定と整合的な結果である．期間 B でのリスクの市場価格の 1 次成分は－0.884, 2 次成分が －1.886 である．表 2 のブルスティープの行をみると，1 次，2 次成分ともに negative であり，このケースでも表 2 と整合的な結果を示した．リスクの市場価格を計算し，その結果を分析するときに，4.4 節での議論が役に立つであろう．

LIBOR マーケットモデルのフレームワークでもリスクの市場価格の解釈は HJM モデルと基本的に同じである．表 4 の最右列は同じ期間のデータについて，LIBOR マーケットモデルで計算したリスクの市場価格である（Yasuoka[2013]）．プラスかマイナスかという見方であれば，双方の数値は同じ傾向を示している．

次にリスク中立シミュレーションと RW シミュレーションを比較しよう．ここでリスク中立確率はスポットメジャーである．4.6 節の議論によって，ふたつのモデルの違いはフォワードレートの期待値を命題 5 で比較すればよいことになる．初期フォワードレートに 2009 年 8 月 31 日のフォワード LIBOR を用い，期間 A と B の各条件で半年後のフォワードレートの期待値を図 22 に示す．細実線が初期値で，破線がリスク中立，太実線が現実確率でのシミュレーションの期待値である．

RW シミュレーションでは, 期間 A でフラット化, 期間 B でブルスティープ化が起きている．期間 A の observable trend はベアフラットだったが, ローリング効果を考えると，rolled trend はフラット化しているので，それがシミュレーションに現れたこ

表 4　固有値とリスクの市場価格

Period A: 2 Apr 2007 to 16 Jun 2008.

j	固有値	寄与率	累積寄与率 C_j	ϕj	ϕj LMM
1st	7.61E-04	0.9305	0.9305	-0.256	0.038
2nd	4.53E-05	0.0554	0.9859	0.532	0.758
3rd	5.44E-06	0.0067	0.9926	0.598	0.746
4th	3.29E-06	0.0040	0.9966	0.495	0.114
5th	1.22E-06	0.0015	0.9981	0.896	0.205
6th	5.86E-07	0.0007	0.9988	-1.049	1.226

Period B: 16 Jun 2008 to 31 Aug 2009.

j	固有値	寄与率	累積寄与率 C_j	ϕj	ϕj LMM
1st	4.77E-04	0.8082	0.8082	-0.884	-1.094
2nd	8.35E-05	0.1413	0.9495	-1.886	-1.718
3rd	2.38E-05	0.0402	0.9897	-0.816	0.213
4th	3.14E-06	0.0053	0.9950	1.113	2.570
5th	1.31E-06	0.0022	0.9972	2.445	2.089
6th	5.57E-07	0.0009	0.9982	-0.557	0.550

とになる．命題 2 はこれらの性状を一般的な形で説明している．

リスク中立モデルでは，期間 A，B ともに初期カーブが左に半年分平行移動した形になる．これは 4.6 節の図 19 で示した現象で，リスク中立モデルの計算では従来から経験してきたことである．その結果，初期フォワードレート曲線は左端で逆イールドだが，リスク中立モデルではその部分が左に移動して消え，順イールドを示す点にリスク中立モデルの特徴がよく表れている．

一方 RW シミュレーションの期待値をみると，期間 A，B ともにフォワードレート曲線の左端が逆イールドである．これはリスク中立モデルでは起きない. 観測期間中の金利の性状が再現されるという RW シミュレーションの特徴がよく表れているといえよう．RW シミュレーションでは観測期間中の金利トレンドが再現されるので，シミュレーションモデルの構築には観測期間を慎重に選ぶ必要があることを注意しておきたい．

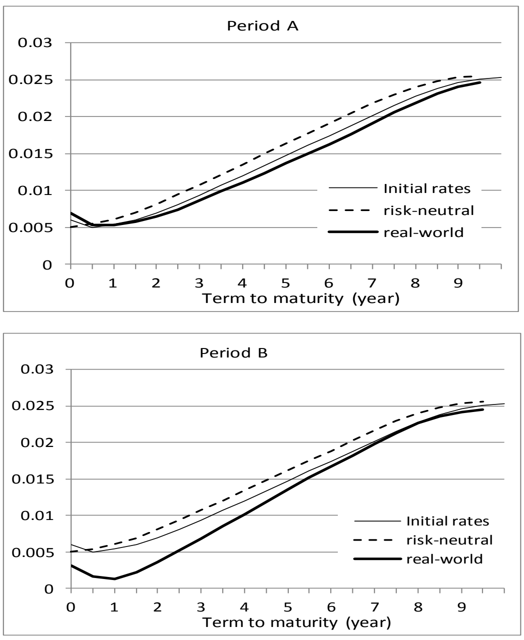


図 22　半年後のフォワードレートの期待値　上は期間 A,下は期間 B から求めたパラメータを使用

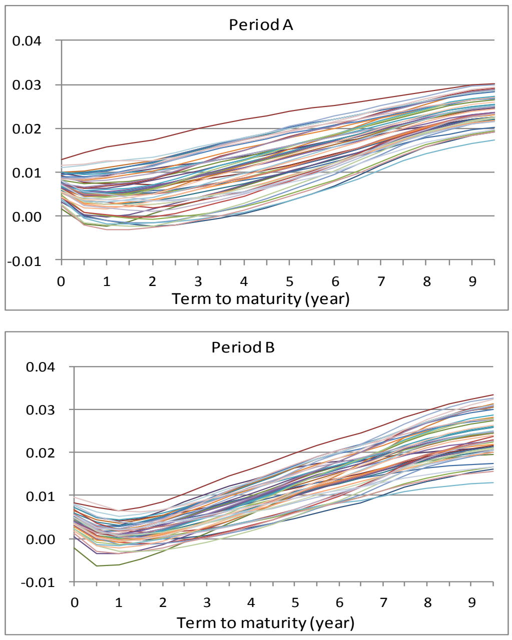


図 23　半年後のフォワードレートのシミュレーション（50 パス）　上は期間 A，下は期間 B

期間 A,B ともにリスク中立シミュレーションのほうが RW シミュレーションより金利が高く，2.2 節 b)の背景となる現象がみられる．同じ条件で，半年後のフォワードレートを 1 期間 3 ファクターモデルで 50 回シミュレーションしたときの計算例を図 23 に示す．ヒストリカルデータにリスクの市場価格がプラスになる事例が存在するかどうかは，興味深いテーマである．4.4 節の最後に述べたように，その候補になるケースは早い金利上昇が長期間続いた時期である．この問題については別の機会にで報告したい．マイナス金利が現れることは，正規分布型モデルの弱点だが，金利上昇リスクを捉える目的にはわかりやすいモデルである[2].

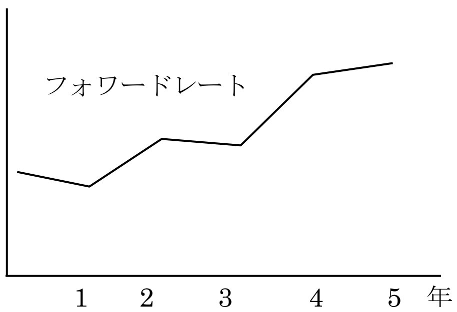


図 24　5 年間の金利変動の例

7 リスクの市場価格一定の仮定について

本稿ではリスクの市場価格が観測期間中一定であると仮定し，最小二乗法でリスクの市場価格を計算する方法を示した．その結果，リスクの市場価格は金利変動の変化（トレンド）によって説明できることを理論的に示した．

4.4 節で述べたように，計量経済学ではリスクの市場価格をなんらかの状態変数で説明しようという研究が試みられてきた．たとえば金利を状態変数としたとき，リスクの市場価格を金利の水準で説明する試みである．本稿では金利の水準ではなくその変化でリスクの市場価格を説明できるとしているので，伝統的な研究アプローチとは相容れにくいところがある．リスクの市場価格を一定と仮定することへの批判はあるだろうし，筆者自身も何か考え落ちはないかと自省しつつ仕事を進めてきた．そして次の考え方に至った．

リスクの市場価格を求めることが研究のゴールであれば，さらに合理的な考え方があるかもしれない．しかし本稿の目的は経済学の研究のためにリスクの市場価格を求めることではなく，リスク管理である．リスクの市場価格を求めることはプロセスのひとつである．つまり過去のデータを分析し，理論的な裏付けのある金利のシミュレーションモデルを作ることが目的である．この立場でエンジニアリングの問題として考えると，観測期間中のリスクの市場価格を一定と仮定することはリスク管理の目的に適っている．その理由を説明しよう．

ここに過去の金利データがあるとする．簡単のためフォワードレートはフラットで，日々金利の平行移動による変動が起きているとする．これは 1 ファクターモデルでモデル化できるので，リスクの市場価格は 1 次成分のみを考えればよい．ボラティリティは一定とする．

そして観測期間 5 年のデータからシミュレーションモデルを作ることの意味を考える．5 年間のスパンでみて，もっとも金利上昇が大きい期間を抽出し，そのときのフォワードレートが図 24 のように変化したとしよう．

リスクの市場価格は日々変動しているかもしれないが，簡単のため年単位で変動し，各年で一定と仮定する．命題 3 で各年ごとにその計算を行い，$\phi(i), i=1,\cdots,5$ で i 年目のリスクの市場価格を表す．命題 4 あるいは表 2 から，金利上昇の年のリスクの市場価格はプラス，金利低下の年はマイナスである．

2　近年ではいくつかの主要国で国債のマイナス金利が観測されているので，マイナス金利が現れることは弱点ではないのかもしれない．

したがって各年のリスクの市場価格は下表のような値をとるであろう．

金利リスクの評価期間は目的によって異なるが，１か月や１年間などである．仮に１年間の金利変動を１期間モデルでシミュレーションする場合，表５の何年目のリスクの市場価格を使えばよいのだろうか？ １年目のリスクの市場価格を使うなら，ϕ(1)がマイナスなので，金利が低下する状況を再現するであろう．これは金利上昇リスクを評価したことにならない．

金利上昇がもっとも大きい4年目のデータを使えば，ϕ(4)が最大のプラス値をとるので，大きな金利上昇局面を再現するシミュレーションモデルがでる．しかし，これは5年間のデータを使ったことにならず，過去のもっとも厳しい１年のデータを使った評価になってしまう．金融機関はこの方法を採用したくはないであろう．さらに細かい期間，月あるいは日ベースでリスクの市場価格を計算しても同様である．5年間のリスクの市場価格を一定と仮定すると，図24では全体として金利が上昇しているので，rolled trendはプラスであり，リスクの市場価格もプラス値であろう．その結果を使えば，5年間の平均的な金利上昇をシミュレーションするモデルになると考えられる．図25はそれを直感的に表したもので,実線矢印は1年分のドリフトを表す．シミュレーション時にはこのドリフトを期待値とするさまざまな金利パスが生成される．このモデルなら，5年分のデータを使った意味があると考えて過不足がない．リスクの市場価格を観測期間中一定と仮定することは，観測期間中に起きた金利の平均的な上昇をドリフト項とするモデルを構築する意味があるのだ．

本稿の目的は，リスクの市場価格を経済学的に研究することではなく，過去の金利変動をシミュレーションできるモデルを構築することである．そのためには，観測期間中リスクの市場価格を一定と仮定したほうが，リスク管理の目的に適うモデルができることになる．より長い期間を多期間モデルで金利シミュレーションを行うためには，さらに研究を発展させる必要がある．

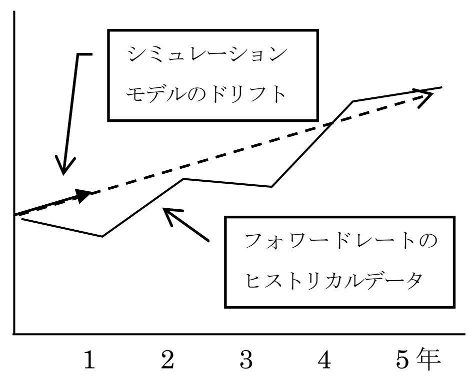


図25　リスクの市場価格を５年間一定と仮定
実線矢印：１年間のシミュレーションのドリフト

表5　図24のケースにおける
各年のリスクの市場価格の値

i	$\phi(i)$
1	マイナス
2	プラス
3	マイナス
4	プラス
5	プラス

8 おわりに

リスク管理のための金利シナリオを金利モデルによって生成するという目的で，金利リスク評価のリテラシーからRWシミュレーションの実装までを一通り説明した．

金利デリバティブの価格計算のために金利モデルを実現する場合は，プレーンなオプションとの価格整合性が必須である．また同業者と価格を比較されるので，モデルによる価格差はそれほど開かないし，うまくヘッジできれば結果オーライである．

一方，RWシミュレーションは比較するものがないため，モデルリスクが大きい．本稿では，リスクの市場価格を観測期間中一定という仮定のもとで，リスクの市場価格を導き，RWシミュレーションの性質を体系的に説明した．初めに置いた仮定が忘れ

られ，方法論だけが一人歩きし始めることは，これまで数多く繰り返されてきたことである．命題 2 の使い方によっては恣意的な計算が可能になり，リスク評価そのものがコントロールされてしまう．そうなると RW シミュレーションの結果というだけでは，信頼できるリスク評価になっていないこともあり得る．そうならないためには，RW シミュレーションの意味と性質を多くの関係者が理解していることが重要である．その意味で要約すると，冒頭で述べたことの繰り返しになるが，RW シミュレーションは「金利変動のシナリオ生成に不確実な変動と確定的なドリフト（トレンド）を合理的に反映させること」ができる手法以上のものでも以下でもない．

最後に，保有期間 1 年の 99%VaR の意味を考えてみよう．これは 100 年に 1 度の損失を推定することが目的であろう．その目的が忘れられると，直近の金利低下局面のデータや，主成分分析だけの金利シナリオで VaR を評価すればよしとするリスク管理になってしまう．そのような考え方で 100 年に 1 度の損失を推定できるのだろうか．これまでは科学的な理論がなかったのでしかたがなかったともいえるが，もう道具立てがないとはいえなくなってきた．リスク管理のあり方を議論しなおす段階にきているのではないだろうか．

付録

付録 1　HJM モデルの概要

3.1 節の議論に必要な基礎知識として，HJM モデルのフレームワークを概説しておく．詳細はバクスター[2001]などを参照のこと．

フォワードレートの挙動を

$$df(t,T)=\alpha(t,T)dt+\sigma(t,T)\cdot dZ$$

で表す．ここで $\alpha(t,T)$ と $\sigma(t,T)$ は $f(t,T)$ のドリフト係数とボラティリティである．d ファクターモデルの場合，これらは d 次元ベクトル値である．$Z(t)$ は現実確率下の d 次元標準ブラウン運動で，. はベクトルの内積である．時刻 t での瞬間的短期金利 $r(t)$ は

$$r(t)=f(t,t)$$

である．HJM モデルのニューメレールは savings account $B^*(t)$ で，これは(2.1)式で定義される．満期が T のゼロクーポン債の価格 $B(t,\ T)$ は

$$B(t,T)=\exp\left(-\int_t^T f(t,u)du\right) \qquad \text{(a.1)}$$

で表される．債券価格が満期に額面金額に等しいという条件は $B(T,T)=1$ で表されるが，これは(a.1)によって満たされている．

(3.2)の $f(t,T)$ を(a.1)の右辺に代入すると次式を得る．この計算はたとえば Filipovic[2009]を参照のこと．

$$\begin{aligned}B(t,T)=B(0,T)&+\int_0^t B(s,T)(r(t)+b(s,T))ds\\&+\int_0^t B(s,T)\upsilon(s,T)\cdot dZ\end{aligned} \qquad \text{(a.2)}$$

ここで

$$\upsilon(t,T)=-\int_t^T\sigma(t,u)du$$

$$b(t,T)=-\int_t^T\alpha(t,u)du+\frac{1}{2}|\upsilon|^2$$

としている．したがって $f(t,T)$ を決定するパラメータ α と σ によって債券価格 $B(t,T)$ が記述されることがわかる．相対価格過程 $B(t,T)/B^*(t)$ は

$$\begin{aligned}\frac{B(t,T)}{B^*(t)}=B(0,T)&+\int_0^t\frac{B(s,T)}{B^*(s)}b(s,T)ds\\&+\int_0^t\frac{B(s,T)}{B^*(s)}\upsilon(s,T)\cdot dZ\end{aligned} \qquad \text{(a.3)}$$

で表される．HJM によると，債券市場が無裁定であることと，次式の解 $\phi(t)$ が存在することは同値である．

$$b(t,T)=\upsilon(t,T)\cdot\phi(t) \qquad \text{(a.4)}$$

右辺の φ はリスクの市場価格である．上式は φ の正負を(2.4)に合わせてあり，ほとんどの論文の定義と同じだが，HJM[1992]とは正負が逆になっていることに注意しておきたい．また φ の各成分の符号は 4.4 節で議論したように高次のボラティリティ（あるいは主成分）の正負の設定を変えると反転することに注意が必要である．(a.4)を相対価格過程(a.3)に代入すると

$$\frac{B(t,T)}{B^*(t)} = B(0,T) + \int_0^t \frac{B(s,T)}{B^*(s)} \upsilon(s,T)\cdot(\phi(t)ds + dZ)$$

である．ここで

$$Z^*(t) = \int_0^t \phi(t)ds + dZ$$

とおくと，Girsanov の定理によって P と同値な測度 Q が存在し，Q の下で Z^* は標準ブラウン運動である．P と Q の関係は具体的に表すことができるが，本稿では不要なので扱わない．興味のある人はバクスター[2001]などを参照のこと．債券の相対価格過程は Z^* によって

$$\frac{B(t,T)}{B^*(t)} = B(0,T) + \int_0^t \frac{B(s,T)}{B^*(s)} \upsilon(s,T)\cdot dZ^*$$

と表され，すべての T に対して $B(t,T)/B^*(t)$ は Q の下でマルチンゲールであることがわかる．つまりリスク中立確率 Q は B^*をニューメレールとする同値マルチンゲール測度である．
このとき P の下で $f(t,\ T)$ は次式で表される．

$$df(t,T) = \sigma(t,T)\cdot(-\upsilon(t,T) + \phi(t))dt + \sigma(t,T)\cdot dZ$$

これは Q の下では

$$df(t,T) = -\sigma(t,T)\cdot\upsilon(t,T)dt + \sigma(t,T)\cdot dZ^* \quad \text{(a.5)}$$

と表され，HJM モデルのフォワードレート過程としてよく知られている形である．債券や金利オプションの価格計算はリスク中立確率測度 Q の下で(a.5)を計算すればよい．この場合リスクの市場価格を推定する必要がないので，ボラティリティ σ のみを推定できればよい．

ここで(a.2)の右辺第 2 項に

$$\mu(t,T) = r(t) + b(s,T)$$

を代入すると次式を得る．

$$\frac{dB(t,T)}{B(t,T)} = \mu(t,T)dt + \upsilon(s,T)\cdot dZ$$

υ は債券価格のボラティリティであり，(a.4)から

$$\mu(t,T) - r(t) = \upsilon(t,T)\cdot\phi(t) \quad \text{(a.6)}$$

となる．左辺は瞬間的短期金利 $r(t)$ に対する超過リターンで，ϕ はリスクの市場価格である．とくに 1 ファクターモデルのとき，(a.6)式は

$$\frac{\mu(t,T) - r(t)}{\upsilon(t,T)} = \phi(t)$$

であり(2.5)式と同じである．(a.6)は 2.5 節のリスクの市場価格の定義(2.5)を一般化（高次元化）した形になっている．このときリスクの市場価格は債券の満期に依存しない定義になっていることがわかる．

付録 2 共分散行列とドリフト項の計算時の注意

共分散行列とドリフト項の計算で適切な方法を行わないと，RW シミュレーションへの数値的な影響が大きいので注意を述べておく．(4.4)を再掲すると

$$\Delta F(t_k, x_i) = F(t_{k+1}, x_i - \Delta t) - F(t_k, x_i) \quad \text{(a.7)}$$

である．通常，フォワードレートは満期 x_i, $i=1,2,\ldots$ として $F(\ \ , x_i)$ を観測しており，$x_i - \Delta t$ という半端な満期のフォワードレートを観測していない．実務では

$$\Delta F(t_k, x_i) \approx F(t_{k+1}, x_i) - F(t_k, x_i)$$

と近似するケースが多いと考えられるが，実際に計算してみるとこの方法では RW シミュレーションに固有の性状が現れないケースがある．細かい議論になるのでここでは省略するが，詳しくは Yasuoka[2012]を参照のこと．RW シミュレーションの特徴を引き出せる計算を行うためには，満期 x_i, x_{i-1} のフォワードレートから $F(\ \ , x_i - \Delta t)$を補間などで計算する必要がある．例えば線形補間で

$$F(t_{k+1}, x_i - \Delta t) = \left(1 - \frac{\Delta t}{\delta}\right) F(t_{k+1}, x_i - \Delta t) + \frac{\Delta t}{\delta} F(t_{k+1}, x_{i-1}) \quad \text{(a.8)}$$

とする．これを(a.7)に代入して ΔFを求め，共分散行列 V_{ij}とドリフト項 $E^H[\Delta F(\ \ , x_i)/\Delta t]$ を計算

すればよい．

$F(\ ,x_i\text{-}\Delta t)$ の補間にはスプライン補間を使う方法もある．この場合は，フォワードレート曲線の両端でスプライン補間の端点処理（境界条件）を適切に行わないと，特異値が現れる懸念がある．とくに期近のフォワードレートは RW シミュレーションに固有な結果が現れるので，端点処理に数値解析上の的な注意が必要である．

付録 3　ハルホワイトモデルでのシミュレーション法

5.3 節で示したハルホワイトモデルのシミュレーションモデルの具体的な構築について補足する．筆者はハルホワイトモデルでの RW シミュレーションをまだ実現しておらず[2]，以下はひとつのプランにすぎない．考え方によっては他の方法もあり得る．

β，κ はすでに与えられているものとする．まず $E^H[\Delta F(\ ,x_i)/\Delta t]$ の計算法を述べる．1 ファクターのフルファクターモデルであるためには，ある定数 δ が存在して，すべての i で

$$E^H\left[\Delta F(\ ,x_i)/\Delta t\right]=\delta\exp(-\kappa x_i) \qquad \text{(a.9)}$$

が成立しなければならない．そうでなければまだ他のファクターが存在することになるからである．実際のデータはそうではないので，(a.9)を近似して考える．そのために各時刻 t_k で ΔF を

$$\Delta F(t_k\ ,x_i)\approx\beta_k\exp(-\kappa x_i)$$

の近似を満たすように，最小２乗法などで β_k を求めればよい．ここで β_k は各時刻 t_k ごとに定まる定数である．上式の全期間の平均をとると次式が成り立つ．

$$E^H\left[\Delta F(t_k\ ,x_i)\right]\approx\frac{1}{J\Delta t}\sum_{k=1}^{J}\beta_k\exp(-\kappa x_i)$$

これと(a.9)から，δ をは次式で定めることにする．

$$\delta=\frac{1}{J\Delta t}\sum_{k=1}^{J}\beta_k$$

この δ を計算すれば(a.9)の近似ができたことになる．このモデルは 1 ファクターのフルファクターモデルなので，命題 2 と(a.9)から 1 期間のシミュレーションモデルは

$$f(\Delta s,T_i)=f(0,T_i)+\delta\exp(-\kappa x_i)\Delta s \\ +\sqrt{\Delta s}\,\beta\exp(-\kappa x_i)\cdot Z(1)$$

で表される．

次にリスクの市場価格を計算する．(5.4)で近似したボラティリティ $\beta\exp(-\kappa x_i)$ は 1 次主成分を近似したものだが，これを主成分とみなしてモデルを作ればよい．このボラティリティのノルムの 2 乗を

$$\rho^2=\sum_{i=1}^{n}\left|\beta\exp(-\kappa x_i)\right|^2$$

とおくと，ρ^2 は固有値である．(4.8)より，固有ベクトル（主成分）は次式で与えられる．

$$e_i=\frac{\beta}{\rho}\exp(-\kappa x_i),\quad i=1,\cdots,n \qquad \text{(a.10)}$$

(4.6)に（a.9）を代入すると次を得る．

$$\gamma_i=\delta\exp(-\kappa x_i)+\sigma_i\upsilon_i\,,$$

ここで σ_i は(5.4)で定めたものである．1 ファクターモデルのときの MPR スコア ζ は(4.10)から

$$\zeta=\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\,e_i$$

で表される．γ_i と e_i に(a.10)と上式を代入すれば MPR スコアは計算できる．これで ζ と ρ が計算できているので，命題 3 からリスクの市場価格は

$$\phi=\zeta/\rho$$

で得られる．

2　本稿の初稿提出後に，ハルホワイトモデルの RW シミュレーションモデルを実現したが，詳細は別の機会に紹介予定である．

参考文献

FFR+ [2010]，『リスク計量化入門 : VaR の理解と検証』，金融財政事情研究会 .

バクスター他[2001]，藤田他訳,『デリバティブ価格理論入門–金融工学への確率解析–』，シグマベイスキャピタル.

安岡孝司[2012],『債券投資のリスクとデリバティブ –投資家のための金融工学』，大学教育出版.

Björk, T. [2004], *Arbitrage theory in continuous time,* Oxford univ. press.

Brace, A., and M. Musiela[1994] , "A multifactor Gauss Markov implementation of Heath , Jarrow, and Morton", *Math. Finance*, 4(3), 259-283.

Brace, A., et al. [1997], "The Market Model of Interest Rate Dynamics", *Math. Finance*, 7 (2), 127-155.

Brigo, D. and F. Mercurio [2007], *Interest Rate Models-Theory and Practice: With Smile , Inflation and Credit,* Springer.

Dempster, M., et al. [2010], "Long-Term Interest Rates and Consol Bond Valuation", *J. of Asset Manag.* 11 (2), 113-135.

Filipovic, D. [2009] , *Term-Structure Models: A Graduate Course*, Springer

Gatarek, D., P. Bachert, and R. Maksymiuk [2007], *The LIBOR Market Model in Practice*, John Wiley & Sons.

Harrison, J. M. and D. M. Kreps [1979], "Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets", *J. of Economic Theory*, 20 (3), 381-408.

Harrison, J. M. and S. R. Pliska [1981], "Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading" , *Stoch . Processes and their Appl.,* 11 (3), 215-260.

Heath, D., R. Jarrow, and A. Morton [1992], "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation", *Econometrica,* 77-105.

Hull , J . and A . White [1990] , "Pricing Interest-Rate-Derivative Securities", *Rev. of Financial Studies,* 3 (4), 573-592.

Hunt, P. and J. Kennedy [2004.], *Financial Derivatives in Theory and Practice ,* John Wiley & Sons.

Munk, C. [2011], *Fixed Income Modelling* , Oxford University Press.

Musiela , M . and M . Rutkowski [1997] , "Continuous-Time Term Structure Models: Forward Measure Approach" , *Finance and Stoch.,* 1 (4), 261-291.

Stanton, R. [1997], "A Nonparametric Model of Term Structure Dynamics and the Market Price of Interest Rate Risk", *J. of Finance,* 52 (5), 1973-2002.

Yasuoka, T. [2012], "LIBOR Market Model under the Real-world Measure , and Real-world Simulation", *Shibaura MOT Discussion Paper,* 2012-2.
http://mot-innovation.shibaura-it.ac.jp/characteristic/discussion_paper/

Yasuoka, T. [2013], "LIBOR Market Model Under the Real-World Measure", *Int. J. of Theoretical and Applied Finance.* 16, 1350024.

Yasuoka, T.[2015], "Interest-Rate Simulation under the Real-world Measure within a Gaussian HJM Framework" , *Quantitative finance letters,* 3(1), 10-16.
http://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/21649502.2014.995213#.VNRSP52sURo

特別寄稿

Interest Rate Simulation for Risk Management

Takashi YASUOKA

Graduate School of Engineering Management,
Shibaura Institute of Technology,

3-9-14 Shibaura, Minato-ku, Tokyo 108-0023, Japan
yasuoka@shibaura-it.ac.jp

Abstract

In this article, we explain how to use an interest rate model for interest-rate-risk assessment. First, an introduction is given to study interest-rate-risk, and the market price of risk is introduced in arbitrage-free pricing theory. Next, a method to estimate the market price of risk, and the property of interest rate simulation are explained. Additionally, it is shown that the market price of risk is interpreted by the historical trend of the forward rate change. Finally for practical use, we give some remarks to construct a simulation model, and to use the Hull-White model.