JARIP研究会　　2009年2月25日

コピュラの金融実務での活用

日本銀行金融研究所
吉羽 要直
E-mail: toshinao.yoshiba@boj.or.jp

本講演に示されている意見は、講演者個人に属し、日本銀行の公式見解を示すものではない。

バックグラウンド・ペーパー

- 戸坂 凡展、吉羽 要直、「コピュラの金融実務での具体的な活用方法の解説」、『金融研究』、第24巻別冊第2号、 115～162頁、日本銀行金融研究所、2005年12月
  - 統計言語Rを用いたプログラム例などを含む
  - ダウンロード: http://www.imes.boj.or.jp/kanko.html

アウトライン

１．コピュラとは？

２．コピュラの選択

３．コピュラのパラメータ推定

４．コピュラに従う乱数の発生方法

コピュラ一般の参考文献

５．株式ポートフォリオ評価への応用

６．信用リスクへの応用

７．CDO評価への応用

CDOへの応用に関する参考文献

８．分析上の留意点

９．まとめ

１．コピュラとは？

- 同時分布を周辺分布の関数として解釈したもの
- **数学的定義：以下の**n**変量関数**C

$$
\begin{aligned}
F(x_1,\cdots,x_n) &= \Pr(X_1 \le x_1,\cdots,X_n \le x_n) \\
&= \Pr(F_1(X_1) \le F_1(x_1),\cdots,F_n(X_n) \le F_n(x_n)) \\
&= \Pr(U_1 \le F_1(x_1),\cdots,U_n \le F_n(x_n)) \\
&= C(F_1(x_1),\cdots,F_n(x_n))
\end{aligned}
$$

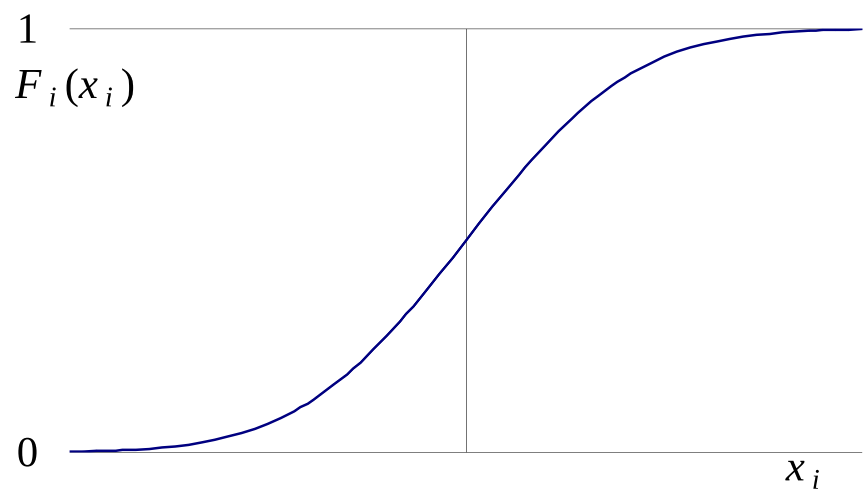
コピュラ（copula、接合分布関数）

- F: 確率変数$X_1, X_2,\ldots, X_n$の（n変量）同時分布関数
- $F_1, F_2,\ldots, F_n$: 周辺分布関数（$F_i(x) = \Pr(X_i \le x)$）

１．コピュラとは？

- コピュラの解釈
  - **確率変数**$(X_1, X_2,\ldots, X_n)$**の周辺分布での分布関数の値を新たな確率変数**$(U_1, U_2,\ldots, U_n)$**とすると（**$U_i = F_i(X_i),\ \ i = 1,\ldots,n$**）、各**$U_i$ **は**$[0,1]$**の一様分布に従う**

$$
\begin{aligned}
\Pr(U_i \le u_i) &= \Pr(F_i(X_i) \le u_i) \\
&= \Pr(X_i \le F_i^{-1}(u_i)) \\
&= F_i(F_i^{-1}(u_i)) = u_i
\end{aligned}
$$



  - **確率変数**$(U_1, U_2,\ldots, U_n)$**の同時分布関数がコピュラ**

１．コピュラとは？

- 直観的には
  - 変数間の相互依存関係を表す関数
    - 同時分布のうち、各変量独自の周辺分布を除いた部分の依存構造を示す
    - （線形）相関係数よりも一般的なもの
  - 依存性のある多変量の一様分布の同時分布関数
    - 各変量で$U_i \to 0$は $X_i \to -\infty$
    - 各変量で$U_i \to 1$は $X_i \to +\infty$

１．コピュラとは？

- 実務的な背景
  - 複数の金融資産からなるポートフォリオのリスク管理
  - CDO、バスケット･オプションなど原資産が複数ある商品のプライシング

- アプローチ
  - いくつかのリスク･ファクターを設定し、それらは多変量の確率分布に従うと想定し、分析
  - リスクファクターの周辺分布を設定するとともに、コピュラを設定することで、想定する多変量確率分布を規定

１．コピュラとは？

- 実務での利用
  - 変量を具体的なファクターに紐付けて、適切なコピュラ（依存構造）を選ぶ（2節）
  - コピュラの推定を行い、変量間の依存関係を把握する（3節）
  - コピュラに従う乱数を発生させ、リスク等のシミュレーションなどの分析を行う（4節）

2. **コピュラの選択：種類**

- **コピュラの種類**
  - **依存関係の表し方と様々なコピュラ**C
    - **特殊なコピュラ**
      - **独立コピュラ、共単調コピュラ**
    - **パラメトリックなコピュラ**
      - 1**パラメータで依存関係を表わすコピュラ**
      - 相関行列を用いて（複数パラメータで）**依存関係を表わすコピュラ**
      - **扱いやすい構造のコピュラ：アルキメディアン・コピュラ**
    - **ノンパラメトリックなコピュラ**
      - 経験同時分布から周辺分布を除いて構成

２．コピュラの選択：種類

- 特殊なコピュラ
  - 独立コピュラ：各変量が独立な場合→同時分布は周辺分布の積

$$\Pr(X_1 \le x_1, \ldots, X_n \le x_n) = \Pr(X_1 \le x_1)\Pr(X_2 \le x_2)\cdots\Pr(X_n \le x_n)$$

$$C(u_1, u_2, \ldots, u_n) = u_1 u_2 \cdots u_n$$

  - 共単調（comonotone）コピュラ：各変量が完全に正従属な場合 $\Pr(X_1 \le x_1, \ldots, X_n \le x_n) = \min_{i=1,\ldots,n} \Pr(X_i \le x_i)$

    - 一番大きな値をとるコピュラ

$$C(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \min(u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

2. **コピュラの選択：種類**

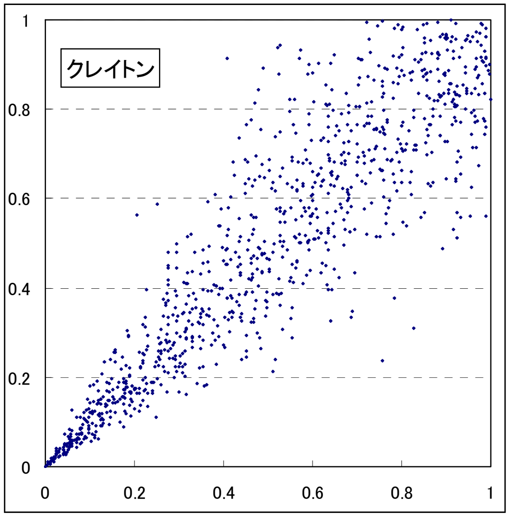
- **パラメトリックなコピュラの種類**
  - 相関行列を用いて**依存関係を表わすコピュラ**
    - 正規コピュラ(ガウシアン・コピュラ)：パラメータは相関行列
    - t コピュラ：パラメータは自由度νと相関行列
  - 1**パラメータで依存関係を表わすコピュラ**
    - クレイトン・コピュラ
    - ガンベル・コピュラ
    - フランク・コピュラ

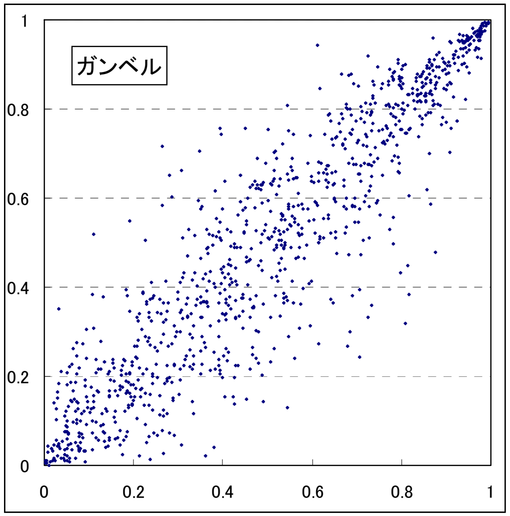
    アルキメディアン・コピュラ

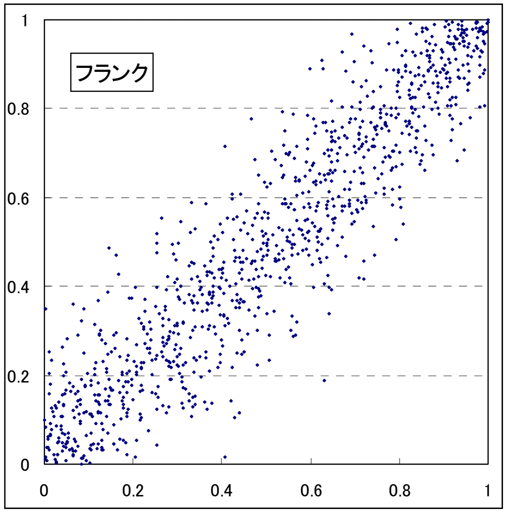
    - 正規コピュラ(ただし、全ての相関を等しくρと置く)
    - tコピュラ(自由度を与え、全ての相関を等しくρと置く)

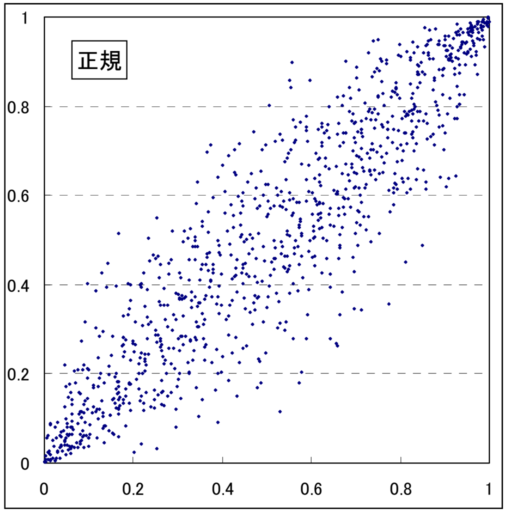
2. コピュラの選択：種類

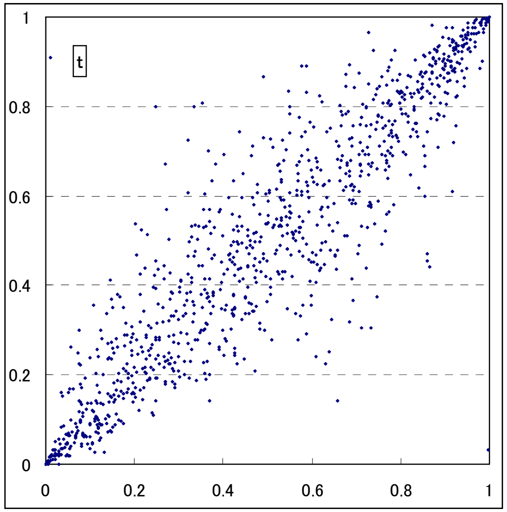
- 1パラメータ・コピュラの違いによる散布図（2変量）











ケンドールの τ を固定（0.75）

tコピュラの自由度 $\nu=3$

２．コピュラの選択：種類

- 1パラメータ･アルキメディアン・コピュラ
  - クレイトン･コピュラ　$0<\alpha<\infty$

$$C(u_1,u_2,\ldots,u_n)=(u_1^{-\alpha}+u_2^{-\alpha}+\cdots+u_n^{-\alpha}-n+1)^{-1/\alpha}$$

  - ガンベル･コピュラ　$1<\gamma<\infty$

$$C(u_1,u_2,\ldots,u_n)=\exp[-\{(-\ln u_1)^{\gamma}+(-\ln u_2)^{\gamma}+\cdots+(-\ln u_n)^{\gamma}\}^{1/\gamma}]$$

  - フランク･コピュラ　$0<\delta<\infty$

$$C(u_1,u_2,\ldots,u_n)=-\frac{1}{\delta}\ln\left\{1+\frac{(e^{-\delta u_1}-1)(e^{-\delta u_2}-1)\cdots(e^{-\delta u_n}-1)}{(e^{-\delta}-1)^{n-1}}\right\}$$

２．コピュラの選択：種類

- アルキメディアン･コピュラとは
  - コピュラ$C\,(u_1,u_2,\ldots,u_n)$が、単調減少凸関数$\phi\,(u)$（生成関数と呼ぶ、 $\phi\,(1)=0$）を用いて、以下のように表せるコピュラ

$$C(u_1,u_2,\ldots,u_n)=\phi^{-1}(\phi(u_1)+\phi(u_2)+\cdots+\phi(u_n))$$

  - アルキメディアン・コピュラは数学的に扱いやすい。
  - 前述のクレイトン、ガンベル、フランク・コピュラはアルキメディアン･コピュラ（以下の生成関数）
    - クレイトン $\phi(u_i)=u_i^{-\alpha}-1$
    - ガンベル $\phi(u_i)=(-\ln u_i)^{\gamma}$
    - フランク $\phi(u_i)=-\ln\dfrac{e^{-\delta u_i}-1}{e^{-\delta}-1}$

$\phi\,(0) = \infty$

２．コピュラの選択：種類

相関行列を用いたコピュラ（楕円型コピュラ）

- 正規コピュラ　$C(u_1,\cdots,u_n)=\Phi_n(\Phi_1^{-1}(u_1),\cdots,\Phi_1^{-1}(u_n);\Sigma)$
  - $\Phi_n(;\Sigma)$はn変量標準正規分布の分布関数（Σ は相関行列）
    $\Phi_1^{-1}()$は1変量標準正規分布の分布関数の逆関数
  - 密度表現

$$c(u_1,\cdots,u_n)=\frac{1}{\sqrt{|\Sigma|}}\exp\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T\left(\Sigma^{-1}-\mathrm{I}\right)\boldsymbol{\omega}\right),$$

Iは$n\times n$の単位行列

$$\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\ldots,\omega_n)^T,\ \omega_i=\Phi_1^{-1}(u_i)$$

  - 各変量の分布関数 $U_i=\Phi_1(X_i)$ →

$$F(x_1,\cdots,x_n)=C(\Phi_1(x_1),\cdots,\Phi_1(x_n))=\Phi_n(x_1,\cdots,x_n;\Sigma)$$

  - $(X_1,\ldots,X_n)$が多変量正規分布→$U_i=\Phi_1((X_i-\mu_i)/\sigma_i)$

２．コピュラの選択：種類

相関行列を用いたコピュラ（楕円型コピュラ）

- t コピュラ $C(u_1,\cdots,u_n)=t_{n,\nu}(t_\nu^{-1}(u_1),\cdots,t_\nu^{-1}(u_n);\Sigma)$
  - $\mathrm{t}_{n,\nu}(;\Sigma)$は$n$変量t分布の分布関数（ただし、$\Sigma$ は相関行列）

    $\mathrm{t}_\nu^{-1}()$は自由度νの1変量t分布の分布関数の逆関数
  - 密度表現

$$c(u_1,\cdots u_n;\Sigma,\nu)=\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+n}{2}\right)\left[\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\right]^n\left(1+\frac{1}{\nu}\boldsymbol{\omega}^t\Sigma^{-1}\boldsymbol{\omega}\right)^{-\frac{\nu+n}{2}}}{\sqrt{|\Sigma|}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\left[\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)\right]^n\prod_{i=1}^n\left(1+\frac{\omega_i^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}},$$

$$\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\ldots,\omega_n)^T,\ \omega_i=t_\nu^{-1}(u_i)$$

2. コピュラの選択：比較指標

- コピュラの比較指標
  - コピュラ同士を比較するため、コピュラによる変量の依存関係を1つの数値として抽出する。
  - 2変量を取り出したとき、
    - 全体的な依存関係を示す指標:「順位相関係数」
    - 分布の裾での依存関係を示す指標:「裾依存係数」
    - 「順位相関係数」も「裾依存係数」ともに各変量の周辺分布に依存せず、コピュラの性質を抽出したもの。
  - 通常の「線形相関係数」は各変量の周辺分布に依存し、比較指標にはならない。

2. コピュラの選択：比較指標

- 全体の依存関係:「順位相関」
  - 任意の2変量の全体的な依存関係を表す
  - データの「値」ではなく、「順位」の「相関」
  - 代表的な順位相関:ケンドールのタウとスピアマンのロー
  - ケンドールのタウ $\tau(X_1, X_2)$

$$\tau(X_1, X_2) \equiv 4\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(x_1, x_2)\,dF(x_1, x_2) - 1 = 4\int_0^1\int_0^1 C(u_1, u_2)\,dC(u_1, u_2) - 1$$

    - 別表現

$$\tau(X_1, X_2) = \Pr\{(X_1^i - X_1^j)(X_2^i - X_2^j) > 0\} - \Pr\{(X_1^i - X_1^j)(X_2^i - X_2^j) < 0\}$$

  - スピアマンのロー $\rho_S(X_1, X_2)$

$$\rho_S(X_1, X_2) \equiv \mathrm{corr}[F_1(X_1), F_2(X_2)] = 12\int_0^1\int_0^1 u_1 u_2\,dC(u_1, u_2) - 3$$

    - 別表現

$$\rho_S(X_1, X_2) = 3[\Pr\{(X_1^i - X_1^j)(X_2^i - X_2^k) > 0\} - \Pr\{(X_1^i - X_1^j)(X_2^i - X_2^k) < 0\}]$$

2. コピュラの選択：比較指標

- 2変量コピュラのパラメータとケンドールのタウτ

τ	クレイトンα	ガンベルγ	フランクδ	正規ρ
0	0	1	0	0
0.1	0.22	1.11	0.91	0.156
0.2	0.50	1.25	1.86	0.309
0.3	0.86	1.43	2.92	0.454
0.4	1.33	1.67	4.16	0.588
0.5	2.00	2.00	5.74	0.707
0.6	3.00	2.50	7.93	0.809
0.7	4.67	3.33	11.4	0.891
0.8	8.00	5.00	18.2	0.951
0.9	18.0	10.0	20.9	0.988
1	∞	∞	∞	1

←Joe [1997] Table 5.1
より抜粋

コピュラ	ケンドールのタウ
クレイトン	$\alpha/(\alpha+2)$
ガンベル	$1-1/\gamma$
フランク	$1+(4/\delta)\{D_1(\delta)-1\}$
正規	$(2/\pi)\arcsin\rho$
t	$(2/\pi)\arcsin\rho$

２．コピュラの選択：比較指標

- 分布の裾での依存関係:「裾依存係数」
  - 2変量X_1、X_2に注目し、一方の分布関数の値が閾値uより大きくなる（小さくなる）とき、もう一方も大きくなる（小さくなる）確率（の極限値）を「裾依存係数」と呼ぶ
  - 上側裾依存係数 λ_U

$$\lambda_U = \lim_{u \to 1-} \Pr(F_2(X_2) > u \mid F_1(X_1) > u)$$

    - λ_U =0 ならば、「上側で漸近独立」という。λ_U が0より大きければ「上側で漸近従属」という。
  - 下側裾依存係数 λ_L

$$\lambda_L = \lim_{u \to 0+} \Pr(F_2(X_2) < u \mid F_1(X_1) < u)$$

    - λ_L =0 ならば、「下側で漸近独立」という。λ_L が0より大きければ「下側で漸近従属」という。

２. コピュラの選択：比較指標

- 各コピュラの裾依存係数

コピュラ	上側 λ_U	下側 λ_L
クレイトン	0	$2^{-1/\alpha}$
ガンベル	$2-2^{1/\gamma}$	0
フランク	0	0
正規	0	0
t	$2\left(1-t_{\nu+1}\left(\sqrt{\frac{(1-\rho)(\nu+1)}{(1+\rho)}}\right)\right)$	$2t_{\nu+1}\left(-\sqrt{\frac{(1-\rho)(\nu+1)}{(1+\rho)}}\right)$

漸近従属　　漸近独立

２．コピュラの選択

- **コピュラの選択方法**
  - 裾依存係数をみながら目的に応じたものを選択
    - 例えば、下側だけに強い依存関係を表したければ、クレイトン・コピュラを選ぶか、ガンベル・コピュラを選んで各変量の向きを逆に適用する。
    - 裾依存性が強い場合には正規コピュラなどは選ばない。
    - 他のコピュラと比較分析する場合は順位相関を合わせる。
  - AICなどの情報量基準を用いて統計的に選択
    - 必要な対数尤度は後述

3. コピュラのパラメータ推定

- **最尤推定**
  - **対数尤度関数**

$$l(\boldsymbol{\psi}_1,\cdots,\boldsymbol{\psi}_n,\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{j=1}^{N} \ln c((F_1(x_1^j;\boldsymbol{\psi}_1),\cdots,F_n(x_n^j;\boldsymbol{\psi}_n);\boldsymbol{\alpha}) + \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{n} \ln f_i(x_i^j;\boldsymbol{\psi}_i)$$

コピュラのパラメータ

$$c(u_1,\cdots,u_n) = \frac{\partial^n C(u_1,\cdots,u_n)}{\partial u_1 \cdots \partial u_n}$$

ここを最大化

こちらは周辺分布による

データ数: N

３．コピュラのパラメータ推定

・ 正規コピュラ

– 多変量正規確率変数へ変換

$$\boldsymbol{\omega}^j = (\omega_1^j, \ldots, \omega_n^j)^{\mathrm{T}},\ \omega_i^j = \Phi_1^{-1}(u_i^j)$$

– 対数尤度

$$l(\Sigma) = -\frac{N}{2}\ln|\Sigma| - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\boldsymbol{\omega}^{j\,\mathrm{T}}(\Sigma^{-1} - \mathbf{I})\boldsymbol{\omega}^j$$

– 相関行列の推定に帰着

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\boldsymbol{\omega}^j\boldsymbol{\omega}^{j\,\mathrm{T}}$$

３．コピュラのパラメータ推定

- tコピュラ
  - 相関行列と自由度νの推定 $\boldsymbol{\omega}^j = (\omega_1^j, \ldots, \omega_n^j)^{\mathrm{T}}, \omega_i^j = t_\nu^{-1}(u_i^j)$
  - 自由度を変えて尤度の高い自由度を選択
  - 対数尤度

$$l(\Sigma, \nu) = N \ln \frac{\Gamma((\nu + n)/2)}{\Gamma(\nu/2)} + nN \ln \frac{\Gamma(\nu/2)}{\Gamma((\nu+1)/2)} - \frac{N}{2} \ln|\Sigma|$$

$$-\frac{\nu + n}{2} \sum_{j=1}^{N} \ln\left(1 + \frac{\boldsymbol{\omega}^{j\mathrm{T}} \Sigma^{-1} \boldsymbol{\omega}^j}{\nu}\right) + \frac{\nu+1}{2} \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{(\boldsymbol{\omega}^j)_i^2}{\nu}\right)$$

  - 各自由度νでの最尤推定

$$\hat{\Sigma}_\nu = \frac{\nu + n}{N} \sum_{j=1}^{N} \frac{\boldsymbol{\omega}^j \boldsymbol{\omega}^{j\mathrm{T}}}{\nu + \boldsymbol{\omega}^{j\mathrm{T}} \hat{\Sigma}_\nu^{-1} \boldsymbol{\omega}^j}$$

    - 反復による収束計算

３．コピュラのパラメータ推定：尤度

- アルキメディアン･コピュラ
  - クレイトン、ガンベル、フランク･コピュラ（1パラメータ）
  - 対数尤度関数を数値的に最大化するパラメータの探索
    - 統計言語Rではoptimize関数を利用

- クレイトン･コピュラの対数尤度

$$l(\alpha) = N\sum_{i=1}^{n-1}\ln(1+i\alpha) - \sum_{j=1}^{N}\{(\alpha+1)\ln(\prod_{i=1}^{n}u_i^j) + (1/\alpha+n)\ln(\sum_{i=1}^{n}(u_i^j)^{-\alpha} - n + 1)\}$$

３．コピュラのパラメータ推定：尤度

- ガンベル･コピュラの対数尤度
  - 2変量 $l(\gamma)=\sum_{j=1}^{N}[-\psi_2^j+\ln\{\frac{(\hat{u}_1^j\hat{u}_2^j)^{\gamma-1}}{u_1^ju_2^j}(\psi_2^j)^{1-2\gamma}\}+\ln\{(\gamma-1)+((\hat{u}_1^j)^\gamma+(\hat{u}_2^j)^\gamma)^{1/\gamma}\}]$
  - 3変量 $l(\gamma)=\sum_{j=1}^{N}[-\psi_3^j+\ln\{\frac{(\hat{u}_1^j\hat{u}_2^j\hat{u}_3^j)^{\gamma-1}}{u_1^ju_2^ju_3^j}(\psi_3^j)^{1-3\gamma}\}+\ln\{(2\gamma-1)(\gamma-1)+3(\gamma-1)\psi_3^j+(\psi_3^j)^2\}]$
  - 4変量 $$l(\gamma)=\sum_{j=1}^{N}[-\psi_4^j+\ln\{\frac{(\hat{u}_1^j\hat{u}_2^j\hat{u}_3^j\hat{u}_4^j)^{\gamma-1}}{u_1^ju_2^ju_3^ju_4^j}(\psi_4^j)^{1-4\gamma}\}$$
$$+\ln\{(3\gamma-1)(2\gamma-1)(\gamma-1)+(11\gamma-7)(\gamma-1)\psi_4^j+6(\gamma-1)(\psi_4^j)^2+(\psi_4^j)^3\}]$$
  - 5変量 $$l(\gamma)=\sum_{j=1}^{N}[-\psi_5^j+\ln\{\frac{(\hat{u}_1^j\hat{u}_2^j\hat{u}_3^j\hat{u}_4^j\hat{u}_5^j)^{\gamma-1}}{u_1^ju_2^ju_3^ju_4^ju_5^j}(\psi_5^j)^{1-5\gamma}\}$$
$$+\ln\{(4\gamma-1)(3\gamma-1)(2\gamma-1)(\gamma-1)+5(5\gamma-3)(2\gamma-1)(\gamma-1)\psi_5^j$$
$$+5(7\gamma-5)(\gamma-1)(\psi_5^j)^2+10(\gamma-1)(\psi_5^j)^3+(\psi_5^j)^4\}]$$

$$\hat{u}_i\equiv-\ln u_i,\quad \psi_i^j\equiv((\hat{u}_1^j)^\gamma+(\hat{u}_2^j)^\gamma+\cdots+(\hat{u}_i^j)^\gamma)^{1/\gamma}$$

３．コピュラのパラメータ推定：尤度

- フランク･コピュラの対数尤度
  - 2変量 $$l(\delta)=\frac{-\delta(w_1+1)(w_2+1)(e^{-\delta}-1)}{\{(e^{-\delta}-1)+w_1w_2\}^2}$$ $$w_i \equiv e^{-\delta u_i}-1$$
  - 3変量 $$l(\delta)=\frac{\delta^2(w_1+1)(w_2+1)(w_3+1)(e^{-\delta}-1)^2\{(e^{-\delta}-1)^2-w_1w_2w_3\}}{\{(e^{-\delta}-1)^2+w_1w_2w_3\}^3}$$
  - 4変量 $$l(\delta)=-\delta^3(w_1+1)(w_2+1)(w_3+1)(w_4+1)(e^{-\delta}-1)^3\times \frac{(e^{-\delta}-1)^6-4(e^{-\delta}-1)^3w_1w_2w_3w_4+w_1^2w_2^2w_3^2w_4^2}{\{(e^{-\delta}-1)^3+w_1w_2w_3w_4\}^4}$$
  - 5変量

$$l(\delta)=\delta^4(w_1+1)(w_2+1)(w_3+1)(w_4+1)(w_5+1)(e^{-\delta}-1)^4\times \frac{(e^{-\delta}-1)^{12}-11(e^{-\delta}-1)^8w_1w_2w_3w_4w_5+11(e^{-\delta}-1)^8w_1^2w_2^2w_3^2w_4^2w_5^2-w_1^3w_2^3w_3^3w_4^3w_5^3}{\{(e^{-\delta}-1)^4+w_1w_2w_3w_4w_5\}^5}$$

4. コピュラに従う乱数の発生方法

- **正規コピュラに従う乱数発生方法**
  - 相関を持つ n変量標準正規乱数$(Y_1, \ldots, Y_n)$を発生させ、$U_1=\Phi_1(Y_1), \ldots, U_n=\Phi_1(Y_n)$とする。
    - $(U_1,\ldots, U_n)=(F_1(X_1),\ldots, F_n(X_n))$が正規コピュラに従う場合、$(\Phi_1^{-1}(U_1), \ldots, \Phi_1^{-1}(U_n))$は相関を持つ$n$変量標準正規分布に従う。
  - 相関を持つ正規乱数の発生
    - 相関行列Σをコレスキー分解　$\Sigma = C\,C^T$
    - n個の独立な標準正規乱数$N = (N_1, \ldots, N_n)$を発生
      - [0,1]の一様乱数→標準正規乱数：Box=Müller法等
    - $Y = C\,N$

4. コピュラに従う乱数の発生方法

- tコピュラに従う乱数発生方法
  - 相関行列 Σ を持つ多変量正規分布に従う乱数$Y_1, \ldots, Y_n$ を発生
  - $Y_1, \ldots, Y_n$ とは独立に、自由度νの χ^2 分布に従う乱数Z を発生

$$Z = \sum_{j=1}^{\nu} W_j^2, \quad W_j \sim N(0,1)$$

  - $$X_i = \frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{Z}} Y_i \qquad i = 1, \ldots, n$$
    - X_iは相関行列 Σ を持つ自由度νのt分布に従う
  - $$U_1 = t_\nu(X_1), \ldots, U_n = t_\nu(X_n)$$

4. コピュラに従う乱数の発生方法

- **アルキメディアン・コピュラ**
  - クレイトン、ガンベル、フランクなど
  - アルキメディアン・コピュラに属するコピュラに従う乱数の代表的な発生方法

（１）条件付確率分布を用いる方法（本講演では省略）

- アルキメディアン・コピュラの場合、生成関数の微分を用いて、逐次的に各変量の乱数を求めるというもの。

（２）潜在変数を用いる方法

- 1パラメータのアルキメディアン・コピュラの場合、ある潜在変数のラプラス変換と、アルキメディアン・コピュラを生成する生成関数の逆関数が対応
- 潜在変数を発生させてから、それを用いて各変量の乱数を同じように生成するというもの。

４．コピュラに従う乱数の発生方法

- **潜在変数法（**Marshall and Olkin [1988]**）**
  - n**変量の同時分布関数**$F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\phi^{-1}(\phi(F_1(x_1))+\cdots+\phi(F_n(x_n)))$$

  - **生成関数の逆関数**$\phi^{-1}(u)$**がある正の潜在変数**θ **の ラプラス変換** $\zeta(s)=E_\theta[e^{-s\theta}]$**になっていたとする。**

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_n)=E_\theta[\exp\{-\theta(\phi(F_1(x_1))+\cdots+\phi(F_n(x_n)))\}]$$

$$=E_\theta[e^{-\theta\phi(F_1(x_1))}e^{-\theta\phi(F_2(x_2))}\cdots e^{-\theta\phi(F_n(x_n))}]$$

$$I_i=\exp(-\theta\phi(U_i))$$

4．コピュラに従う乱数の発生方法

- 潜在変数法（Marshall and Olkin [1988]）
- I_iは[0,1]の一様分布に従う

$$U_i = 0 \Rightarrow \phi(U_i) = \infty \Rightarrow I_i = \exp(-\theta\phi(U_i)) = 0$$

$$U_i = 1 \Rightarrow \phi(U_i) = 0 \Rightarrow I_i = \exp(-\theta\phi(U_i)) = 1$$

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = E_\theta[\underbrace{e^{-\theta\phi(U_1)}}_{I_1} e^{-\theta\phi(U_2)} \cdots e^{-\theta\phi(U_n)}]$$

- 潜在変数θの条件下では$I_1, \ldots, I_n$は独立
- U_iはI_iを用いて $U_i = \phi^{-1}\left(-\frac{\ln(I_i)}{\theta}\right)$

４．コピュラに従う乱数の発生方法

- **潜在変数法：アルゴリズム**

1. ラプラス変換$E_\theta[e^{-s\theta}]$（$= \zeta(s)$）**が**$\phi^{-1}(s)$ となるような確率分布に従う潜在変数θを1つサンプリング→θ_0
2. θ_0とは独立に[0,1]の一様分布に従う確率変数$I_1, \ldots, I_n$を発生。
3. $U_1, \ldots, U_n$ を$U_i=\zeta(-\theta_0^{-1}\ln(I_i))$ for $i=1,\ldots,n$ として生成。

4. コピュラに従う乱数の発生方法

- **潜在変数法：**ラプラス変換$\zeta(s)$**が**$\phi^{-1}(s)$ となる分布
- **クレイトン･コピュラに従う乱数発生方法**
  - $\zeta(s) = (s+1)^{-1/\alpha}$ **→ 標準ガンマ分布**G(1/α)
  - Ahrens-Dieter-Best**の算法など、**R**の**rgamma**関数**
- **ガンベル･コピュラに従う乱数発生方法**
  - $\zeta(s) = \exp(-s^{1/\gamma})$ **→ 安定指数**1/γ**、歪みパラメータ**1**の正値安定分布**
  - Kanter[1975]**の算法**

4. コピュラに従う乱数の発生方法

- **潜在変数法：**ラプラス変換$\zeta(s)$**が**$\phi^{-1}(s)$ となる分布

- フランク・**コピュラに従う乱数発生方法**(Rogge and Schönbucher [2003])
  - $\zeta(s) = -\ln[1-e^{-s}(1-e^{-\delta})]/\delta$ **→** $\beta = (1-e^{-\delta})$**の対数級数分布（定義域は正の整数）**
    - **確率関数** $\Pr[Y=k] = \dfrac{-1}{\ln(1-\beta)} \dfrac{\beta^k}{k}$
    - [0,1]**一様乱数**V **を使い、累積確率が**V **を超える**k**を発生**

コピュラ一般に関する主な参考文献

- 塚原英敦､「接合分布関数（コピュラ）の理論と応用」､『21世紀の統計科学Ⅲ　数理･計算の統計科学』 第5章､2008年､111～146頁
- Bouyé, E., V. Durrleman, A. Nikeghbali, G. Riboulet, and T. Roncalli, "Copulas for Finance: A Reading Guide and Some Applications," Working Paper, Crédit Lyonnais, 2000.
- Cherubini, U., E. Luciano, and W. Vecchiato, *Copula Methods in Finance*, John Wiley & Sons, 2004.
- Embrechts, P., A. McNeil, and D. Straumann, "Correlation and Dependency in Risk Management: Properties and Pitfalls," in *Risk Management: Value at Risk and Beyond*, Dempster, M. A. H. ed., Cambridge University Press, 2002, pp.176–223.
- Frees, E. W., and E. A. Valdez, "Understanding Relationships Using Copulas," *North American Actuarial Journal*, 2(1), 1998, pp.1–25.
- Joe, H., *Multivariate Models and Dependence Concepts*, Chapman & Hall, 1997.
- Nelsen, R. B., *An Introduction to Copulas*, Springer, 1998.

５．株式ポートフォリオ評価への応用

- 株価変動リスク（実証分析）
  - 電機メーカー5銘柄（日立製作所、東芝、三菱電機、日本電気、三洋電機）の等ウエイトポートフォリオのVaR（リスク評価期間：1日）を算出
    - ペーパーでは商社5銘柄も分析
  - 観測期間：1999/1/4〜2001/12/30
  - 各変量（日次収益率）の周辺分布：両側指数分布

$$f(x) = \frac{1}{2q}\exp\left(-\left|\frac{x-p}{q}\right|\right), \quad q>0$$

  - 変量間の依存関係：4種類のコピュラ（正規、t、ガンベル、クレイトン）
    - ガンベルはデータを反転して適用

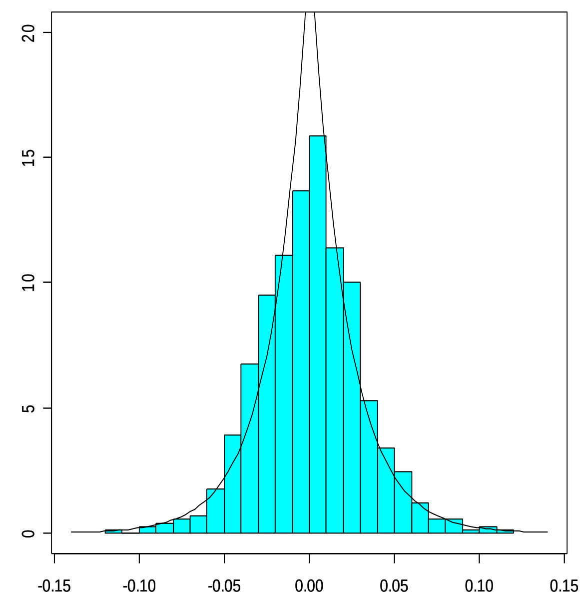
５．株式ポートフォリオ評価への応用

- 周辺分布の推定
  - パラメータp, q の推定

$$f(x) = \frac{1}{2q}\exp\left(-\left|\frac{x-p}{q}\right|\right), \quad q > 0$$

	日立製作所	東芝	三菱電機	日本電気	三洋電機
p	0.000438	–0.000509	0.000522	0.000359	0.000820
q	0.018179	0.019241	0.020787	0.021139	0.020076

経験分布と両側指数分布の例（日本電気株）→



５．株式ポートフォリオ評価への応用

- 周辺分布でデータ変換

収益率

日付	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
1	−0.001	−0.032	−0.063	−0.007	0
2	0.02	0.0231	0.0364	0.002	−0.009
3	0.0509	0.0373	0.0293	0.0413	0.0119
4	−0.008	−0.006	0.0115	0.014	0.0059
5	0.0054	0.0175	0.0392	0.0238	−0.003
6	0.004	−0.001	0.0027	0.0224	−0.021
7	0.012	0.0144	0.0136	0.0193	0.009
8	0.0516	0.0071	0.0371	0.0129	−0.015
9	−0.011	0.0252	0.0155	0.0136	−0.018
10	−0.018	−0.003	−0.013	−0.008	0
11	0.0356	0.0394	0.0556	0.0169	0.0061
12	0.0247	0.008	0.0122	−0.02	−0.012
13	−0.017	−0.005	−0.012	−0.037	0.0184
14	−0.039	−0.005	0	−0.012	0
15	−0.006	0.0027	0.0073	0.008	−0.006
⋮			⋮		

変換後：$[0,1]$一様

U_1	U_2	U_3	U_4	U_5
0.5491	0.9034	0.9762	0.6444	0.52
0.1707	0.1469	0.0891	0.4635	0.6921
0.0311	0.0701	0.1251	0.0722	0.2884
0.6872	0.6217	0.2949	0.2623	0.3886
0.3806	0.1959	0.0777	0.1649	0.5853
0.4104	0.5238	0.4493	0.1765	0.8297
0.2648	0.2305	0.2664	0.2043	0.3332
0.0299	0.3364	0.0859	0.2758	0.7725
0.7391	0.1313	0.2432	0.267	0.807
0.8184	0.5554	0.7379	0.6575	0.52
0.0722	0.0627	0.0354	0.2287	0.3837
0.1317	0.3218	0.2849	0.8119	0.74
0.8107	0.6103	0.729	0.9128	0.2082
0.9436	0.6109	0.5124	0.7277	0.52
0.6581	0.4238	0.3601	0.3476	0.6457
		⋮		

５．株式ポートフォリオ評価への応用

- コピュラのパラメータ推定

正規

Σ	1	0.539405	0.536943	0.569717	0.383190
	0.539405	1	0.597219	0.621137	0.414482
	0.536943	0.597219	1	0.553996	0.443241
	0.569717	0.621137	0.553996	1	0.393412
	0.383190	0.414482	0.443241	0.393412	1

t

自由度	6				
Σ	1	0.584118	0.571661	0.607913	0.426034
	0.584118	1	0.638485	0.667614	0.450915
	0.571661	0.638485	1	0.597704	0.477843
	0.607913	0.667614	0.597704	1	0.448515
	0.426034	0.450915	0.477843	0.448515	1

ガンベル

γ	1.380645

クレイトン

α	0.723174

５．株式ポートフォリオ評価への応用

- リスク指標の算出
  - 等ウエイトのポートフォリオ、リスク計測期間：1日
  - シミュレーション回数：50万回
  - VaR、期待ショートフォール（ES）を損失率で表示

コピュラ	VaR（99%） ES（99%）	VaR（99.5%） ES（99.5%）	VaR（99.9%） ES（99.9%）	VaR（99.99%） ES（99.99%）
正規	5.43% 6.61%	6.27% 7.43%	8.17% 9.29%	10.7% 11.7%
t	5.82% 7.34%	6.86% 8.40%	9.33% 10.9%	13.1% 14.3%
ガンベル	6.23% 8.03%	7.46% 9.27%	10.4% 12.2%	14.4% 16.3%
クレイトン	6.27% 8.01%	7.48% 9.23%	10.3% 12.1%	14.4% 15.9%

６. 信用リスクへの応用

- 設定：銀行の貸出ポートフォリオ
  - 1期間構造型モデル
  - $N(=1$万$)$社への均一与信ポート（状態変数 X_i＜資産価値＞）
    - デフォルト率（一定） $\Pr(X_i \le k_i)=0.5\%$ （k_i：デフォルト閾値）
    - 資産相関（一定） $\rho(X_i , X_j)=\rho$
  - 状態変数間の依存関係$\Pr(X_1 \le k_1,\ldots, X_n \le k_n)$は4種類の$1$パラメータ・コピュラ（正規、t、ガンベル、クレイトン）で表現
    - ケンドールのタウを一致させる。tコピュラの自由度は10。
  - シミュレーションによりデフォルト件数の分布を算出
    - $X_1,\ldots,X_n$ をシミュレートし閾値k_iを下回った企業がデフォルト
    - ガンベルは逆向きに適用

６．信用リスクへの応用

- デフォルト件数の分布
  - シミュレーション回数：10万回
  - 期待値は50 ⇐ 与信先数1万、デフォルト確率0.5%

デフォルト先数の分布（高相関＜0.2＞）

	0.10%	1%	5%	10%	50%	90%	95%	99%	99.90%
正規	0	0	1	2	20	126	198	435	913
t	0	0	0	0	3	112	244	812	2,070
ガンベル	5	8	11	13	21	55	97	467	5,578
クレイトン	0	0	0	0	0	63	208	1179	3,822

デフォルト先数の分布（低相関＜0.038＞）

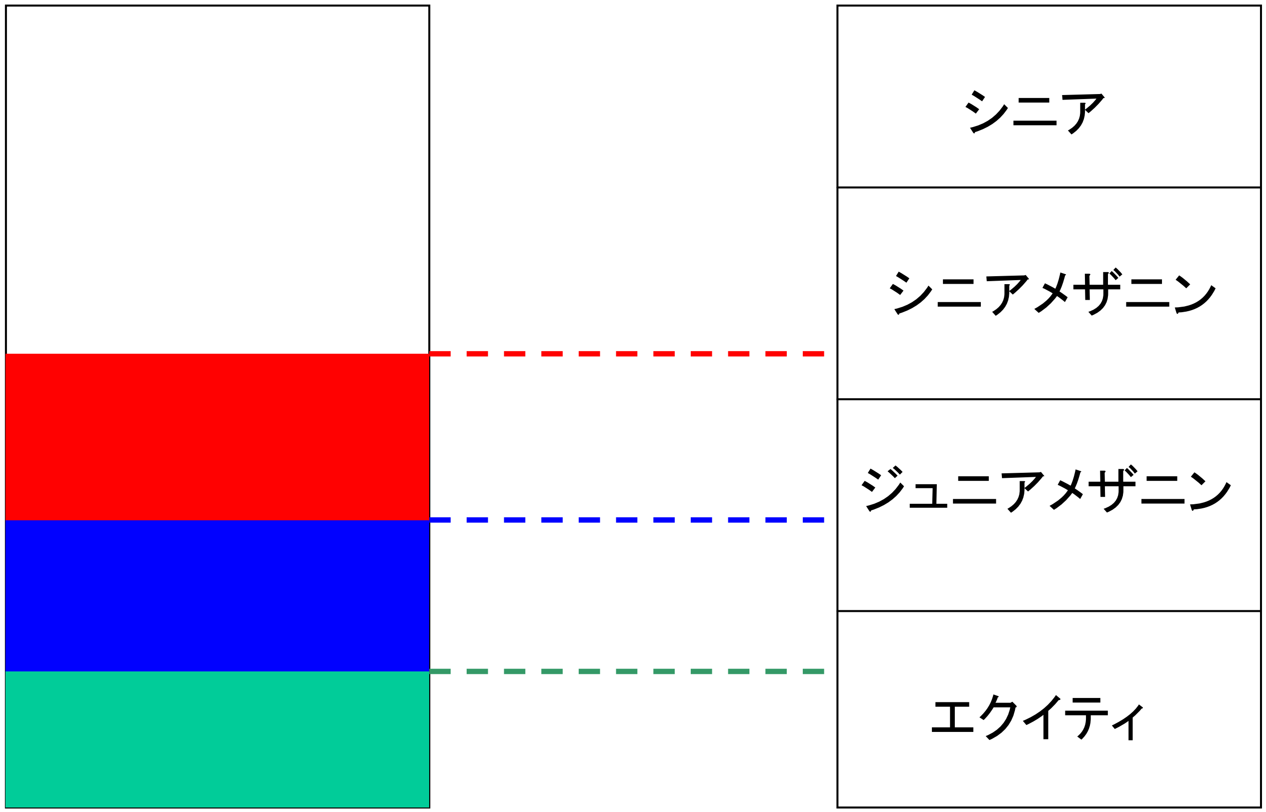
	0.10%	1%	5%	10%	50%	90%	95%	99%	99.90%
正規	4	8	14	19	43	90	109	155	227
t	0	0	0	0	9	133	240	586	1,305
ガンベル	22	27	31	33	42	56	66	156	1,176
クレイトン	0	0	2	3	26	122	179	343	643

7. CDO評価への応用

- CDO（Collateralized Debt Obligation）
  - 資産担保証券の一種で、社債や貸出等から構成されるクレジット・ポートフォリオ（CDOプール）を原資産に持つ。
  - CDOプールの累積の損失に応じて損失が決まる商品に分解（トランチング）
  - 各トランシェを投資家に販売（累積の損失がトランシェの下限値＜アタッチメント＞にタッチしない間はクーポンが支払われる）。

7. CDO評価への応用

- CDOのトランチングと損益
  - プールの累積損失



7. CDO評価への応用

- CDO**の評価**
  - 累積損失に応じて、各トランシェの損失が決定
  - CDOプールの時点tでの累積損失の評価が問題
  - CDOプールが等額、等回収率（確定）の債権の場合
    - 累積損失分布を捉えること⇔各債権のデフォルト時刻の同時分布を求めること

- CDOのプライシング
  - 1変量のデフォルト時刻の分布は別途わかるとして、多変量の依存関係をコピュラで表現
  - デフォルト時刻の同時分布を以下のようにモデル化

7. CDO評価への応用

- デフォルト時刻の同時分布のモデル化

$$\Pr[\tau_{.1} \le t_1, \ldots, \tau_{.n} \le t_n] = C(F_1(t_1), \ldots, F_n(t_n))$$

デフォルト時刻

デフォルト時刻を表す周辺分布関数

$$\tau_1 = F_1^{-1}(U_1) \quad ,\ldots, \quad \tau_n = F_n^{-1}(U_n)$$

コピュラCに従う一様乱数

7. CDO評価への応用

- 正規コピュラを用いたシミュレーション

① 原資産iとjの資産相関がρ_{ij}になるような多変量標準正規乱数 Y_i を発生。

② 標準正規分布の分布関数Φ_1を用いて、標準正規乱数Y_iを一様乱数 $U_i = \Phi_1(Y_i)$ に変換。

③ 得られた一様乱数を周辺分布の逆関数を使って、$\tau_i = F_i^{-1}(U_i)$と変換することで、デフォルト時間をシミュレート。

④ 各パスでデフォルト時間に応じてキャッシュフローを立て、現在価値に直す。全てのパスでの現在価値の平均値を評価。

– キャッシュフローの割引を無リスク金利で行う場合は、全て(デフォルト相関、デフォルト時刻など)をリスク中立下で考える。

7. CDO評価への応用

- 正規コピュラの特殊ケース（1ファクター）
  - 1ファクター･ガウシアン･コピュラモデルとも呼ばれる
  - 前スライドの①を以下のように変更する。

① 原資産iとjの資産相関が$\rho_i\rho_j$になるような多変量標準正規乱数 Y_i を発生。

- (やり方） 互いに独立な1変量標準正規乱数Vとε_iを用いて（Vは資産に依らず共通）次式でY_iを構成。

$$Y_i = \rho_i V + \sqrt{1-\rho_i^2}\,\varepsilon_i$$

- $\rho_i = \rho$ のときはシングルインデックス･1ファクター･ガウシアン･コピュラモデルとも呼ばれる。

7. CDO評価への応用

- CDOプライシングでの留意点
  - 実際のデフォルト時刻（ないし背景の資産）は、正規コピュラの仮定では、依存関係をうまく表しきれないことがある。
  - 変量間の依存関係が分布の裾部分で強い場合、例えば、クレイトン、ガンベル、t　などのコピュラを用いる。
    - 何らかのストレス等で原資産間の相関が急激に上昇したときのCDO価格への影響を調べる「ストレスシナリオ分析」として利用可能。
    - ガンベル･コピュラを用いる場合、依存関係を強くする裾を上側にするように変換。

7. CDO評価への応用

- コピュラ･モデルの違いによる損失率の違い（小宮[2003]）

ガンベル･コピュラ	シニア	メザニン	エクイティ	ポートフォリオ全体
期待値	0.395%	2.463%	10.478%	1.163%
標準偏差	4.199%	15.005%	21.415%	4.918%
95%点	0.000%	0.000%	63.656%	4.456%
99%点	11.805%	100.000%	100.000%	20.624%

正規コピュラ	シニア	メザニン	エクイティ	ポートフォリオ全体
期待値	0.117%	3.142%	14.294%	1.200%
標準偏差	1.195%	16.514%	25.874%	2.772%
95%点	0.000%	0.000%	89.405%	6.258%
99%点	2.832%	100.000%	100.000%	12.548%

・ ポートフォリオ全体の期待損失率はほぼ同じ。

・ 99%点等、シニアへの影響は、ガンベル･コピュラを用いた方が大きい。

CDO評価へのコピュラの応用:参考文献

- 小宮　清孝、「CDOのプライシング・モデルとそれを用いたCDOの特性等の考察　―CDOの商品性、国内市場の概説とともに―」、『金融研究』、第22巻別冊第2号、89~130頁、2003年11月.

- 室町 幸雄、『信用リスク計測とCDOの価格付け』、朝倉書店、2007年
- Laurent, J-P. and J. Gregory, “Basket default swaps, CDOs and factor copulas,” *Journal of Risk*, 7(4), 2005, pp.1–20.

- Hull, J. C. and A. D. White, “Valuing Credit Derivatives Using an Implied Copula Approach,” *Journal of Derivatives*, Winter 2006, pp.8–28.

- Rogge, E. and P. J. Schönbucher, “Modelling Dynamic Portfolio Credit Risk,” working paper, 2003.

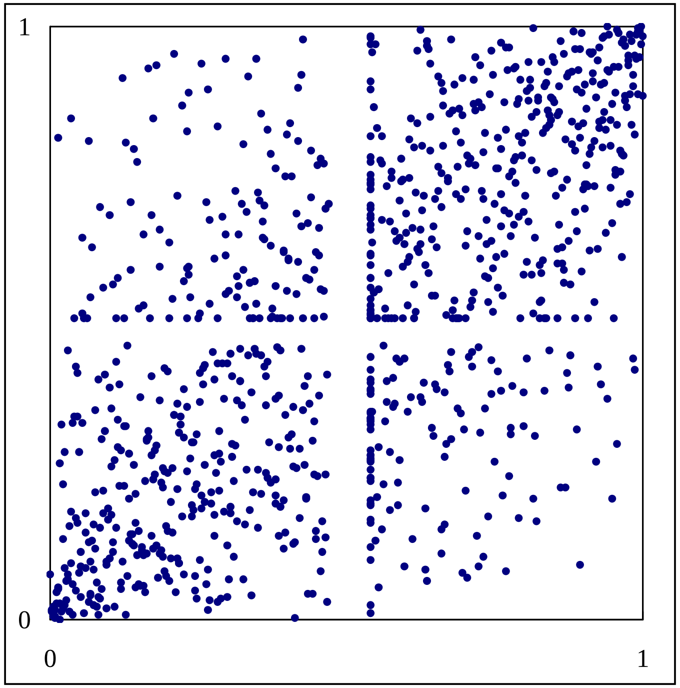
８．分析上の留意点

（１）タイ·データが存在するときの周辺分布の扱い

（問題点）経験分布では一様分布にならない

経験分布変換後の散布図（横軸：トヨタ株、縦軸：ホンダ株）

原データ：2001年1月～2004年12月の日次終値対数収益率



– 経験分布の平滑化、パラメトリックな分布の採用

８．分析上の留意点

（２）変量間の負の依存関係の表現

- ３変量以上の場合
  - すべての変量の組み合せで負の依存構造は、クレイトン、ガンベル、フランク等の1パラメータ･コピュラでは表現不可能。

- ２変量の場合
  - クレイトン・コピュラではパラメータを$-1 < \alpha < 0$とすると、負の依存構造が出現するが、非常に特殊な構造。
  - ガンベル･コピュラでは表現できない。
  - フランク・コピュラではパラメータを$\delta < 0$とすると表現可能。

- 正規、t などの相関行列をパラメータに持つコピュラを利用したほうがよい。

８．分析上の留意点：拡張

（３）動的なコピュラ

- 同時分布構造を捉えたもので（資産価値等の）確率的な時間発展を表現していない。
  - CDOの評価でのコピュラはデフォルト時刻の同時分布

- 確率過程にコピュラを織り込むいくつかの手法
  - 資産価値過程を多変量レヴィ過程の確率過程で表現し、レヴィ測度（ジャンプ部分）にコピュラの構造を導入→動的なコピュラを形成
  - 累積ハザードに対する各変量のデフォルト閾値にコピュラを適用（Rogge and Schönbucher [2003]）

8. 分析上の留意点：拡張

（4）極値コピュラ

- 各周辺分布に関して裾にだけ注目するならば、極限的にコピュラはどういう構造を持つか？
- 極値コピュラC： $C^r(\boldsymbol{u}) = C(\boldsymbol{u}^r)$
  - 「最大値安定」の多変量極値分布が満たすコピュラ
    - 独立コピュラ、共単調コピュラは極値コピュラ
    - ガンベル・コピュラはアルキメディアン・コピュラで唯一の極値コピュラ

参考文献

渋谷 政昭・高橋 倫也、「極値理論、信頼性、リスク管理」、『21世紀の統計科学Ⅱ自然・生物健康の統計科学』 第4章、2008年、89～124頁

９．まとめ

- 様々なコピュラを紹介、選択したコピュラのパラメータ推定方法、乱数の発生方法を提示
- コピュラによりVaR等のリスク指標は大きく変化

- コピュラを使う際に考慮すべきこと
  - 適切なコピュラの選択
    - 全体の依存度合いと裾の依存度合いの適切さ
    - AICなどを用いた統計的な選択
    - 極値→極値コピュラなど、理論的に自然なコピュラ