―― ノート ――――――――――――

リスクと保険 (2009) 所収「NIG 分布: 非正規分布を身近なものにするために」についての補足

水野　敬*

2010 年 10 月 27 日投稿
2010 年 12 月 22 日受理

概要

[水野 (2009)] において，命題 2.5 として「一般逆ガウス分布の尖度が 3 超であれば，GH 分布の尖度も 3 超である.」ことを述べたが，前段を示せなかったので，中途半端な形に留まっていた.

しかし，一般逆ガウス分布は無限分解可能であり，無限分解可能分布の尖度は 3 以上でかつ 3 に等しいのは正規分布のときに限ることを示せるので，上記の前段が導かれる．実は GH 分布も無限分解可能分布であり，尖度が 3 超であることが直接分かる.

本稿では，この無限分解可能分布の性質を紹介して，前稿の不備を補いたい.

キーワード : 無限分解可能分布，一般逆ガウス分布，GH 分布，尖度

1　はじめに

株式，債券あるいは為替などの収益率の時系列データに確率分布を当てはめようとする場合，分布の裾の厚みや長さに関係する尖度が 3 より大きいかどうかは，両者の間で共通しているべきであろう．実際，尖度が 3 未満の時系列データに尖度が 3 超である NIG 分布 (normal inverse Gaussian distribution) を当てはめようとしても，パラメータを推定するアルゴリズムが収束しないことがあるのは，[水野 (2009)](以下，前稿) において述べたとおりである.

NIG 分布の尖度が 3 超であることは，前稿において具体的な計算結果から示した．NIG 分布が含まれる GH 分布 (generalized hyperbolic distribution) の族は，[増田 (2002)] に述べられているように数理ファイナンスで用いられる様々な分布を含むため，GH 分布の尖度は有用な話題かと考えられる．それで，前稿の命題 2.4 および 6.9 において 4 次までの中心積率を分布のパラメータで表す計算式を示した．しかし，複雑な形のためそれから尖度が 3 超であることは言えず，命題 2.5 として「一般逆ガウス分布の尖度が 3 超であれば，GH 分布の尖度も 3 超である.」ことを述べるに留まっていた.

[増田 (2002)]176 頁に述べられているように，一般逆ガウス分布は無限分解可能分布である．無限分解可能分布に対しては，その特性関数がレヴィの標準形という特別な形で表され，中心積率がこの表現を用いて計算出来ることが知られている．その結果から，無限分解可能分布の尖度は 3 以上でありかつ 3 に等しいのは正規分布のときに限ることが簡単に分かる．これにより，前稿命題 2.5 の前段が導かれるだけではなく，実は GH 分布も無限分解可能である ([増田 (2002)]180 頁参照) のでその尖度が 3 超であることも直接言えてしまう.

以下，上に述べた無限分解可能分布の尖度に関する性質を紹介したい.

なお，この場を借りて，拙稿を査読し貴重なご教示を下さったレフェリーの方にお礼を申し上げたい.

* ジブラルタ生命保険 (株)　e-mail: takashi.mizuno@gib-life.co.jp

2　無限分解可能分布に対するレヴィの標準形とその応用

$\mathbb{R}$ で実数全体の集合を表し，以下，1 次元の無限分解可能分布を考える．

$\mathbb{R}$ 上の確率分布 ν が無限分解可能であるとは，任意の正整数 n に対して，ある確率分布 ν_n が存在し，その n 個の畳込みと ν とが等しくなることをいう．特性関数で述べれば，ν, ν_n の特性関数をそれぞれ $\varphi_\nu(t)$, $\varphi_{\nu_n}(t)$ で表すとき，

$$\varphi_\nu(t) = (\,\varphi_{\nu_n}(t)\,)^n \tag{1}$$

となることをいう．

平均 m，分散 s^2 の正規分布，平均 m のポアッソン分布は，それぞれ特性関数が

$$\exp\left(i\,m\,t - \frac{s^2}{2}\,t^2\right), \qquad \exp\left\{\,m\,(e^{it}-1)\,\right\}$$

と書ける．正整数 n に対して，それぞれ 平均 $\frac{m}{n}$，分散 $\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)^2$ の正規分布，平均 $\frac{m}{n}$ のポアッソン分布を取れば，(1) が成り立つ．他に，複合ポアッソン分布，ガンマ分布，負の 2 項分布，コーシー分布なども特性関数の形から無限分解可能分布であることが容易に分かる．しかし，特性関数の形からは明らかでないものがあり，一般逆ガウス分布や GH 分布はそのような例である．無限分解可能ではない分布の例として，一様分布，二項分布があるが，これも決して自明ではない ([佐藤 (1990)] 例 2.1.2 参照)．

無限分解可能分布について，次の性質 (i)，(ii) が知られている．

(i) 確率分布が無限分解可能分布であるためには，その特性関数 $\varphi(t)$ が，

$$\varphi(t) = \exp\left\{ibt - \frac{c}{2}\,t^2 + \int_{\mathbb{R}} (e^{itx} - 1 - itx1_{\{|x|\leqq 1\}})\,\kappa(dx)\right\}$$

$$b \in \mathbb{R}, \quad c \geqq 0,$$

$$\kappa \text{ は } \int_{\mathbb{R}} (x^2 \wedge 1)\,\kappa(dx) < \infty \text{ かつ } \kappa(\{0\}) = 0 \text{ なる } \mathbb{R} \text{ 上の測度}$$

と表せることが必要十分である．これをレヴィ(Lévy) の標準形という．b, c, κ は一意的に決まり，κ をレヴィ測度と呼ぶ．([佐藤 (1990)] 定理 2.2.1)

(ii) X を無限分解可能分布に従う確率変数とし，κ をそのレヴィ測度とする．正整数 k に対して，$\mathrm{E}[\,|X|^k\,] < \infty$ であることと

$$\int_{\mathbb{R}} |x|^k 1_{\{|x|>1\}}\,\kappa(dx) < \infty$$

とが同値である．([佐藤 (1990)] 定理 5.2.3)

また，確率変数の特性関数と積率の関係を示すよく知られた性質として，次を用いる．

(iii) 確率変数 X の特性関数を $\varphi(t)$ とし，その k 階微分を $\varphi^{(k)}(t)$ で表す．
$\mathrm{E}[\,|X|^k\,] < \infty$ ならば，$\varphi(t)$ は k 階連続微分可能であり，

$$\varphi^{(k)}(t) = \mathrm{E}[\,(iX)^k e^{itX}\,] \qquad (\,\mathrm{E}[\,\cdot\,] \text{ は，確率変数の平均を表す}\,)$$

が成り立つ．特に，$\varphi^{(k)}(0) = i^k\,\mathrm{E}[\,X^k\,]$ が成り立つ．

無限分解可能分布に従う確率変数 X の尖度を調べるために，$\mathrm{E}[\,|X|^4\,] < \infty$ と仮定する．前稿命題 2.2 および 6.6 より一般逆ガウス分布および GH 分布はこの仮定を満たす．上記 (ii) より，仮定は，

$$\int_{\mathbb{R}} |x|^4 1_{\{|x|>1\}}\,\kappa(dx) < \infty \tag{2}$$

と言い換えることが出来る．そこで，

$$b' = b + \int_{\mathbb{R}} x1_{\{|x|>1\}}\,\kappa(dx)$$

とおくと，

$$\varphi(t) = \exp\left\{ ib't - \frac{c}{2}t^2 + \int_{\mathbb{R}} (e^{itx} - 1 - itx)\,\kappa(dx) \right\} \tag{3}$$

と書ける．後の (11) で見るように，$b' = \mathrm{E}[\,X\,]$ である．

ln で対数の主値を表し，

$$\Theta(t) = \ln\varphi(t) = ib't - \frac{c}{2}t^2 + \int_{\mathbb{R}} (e^{itx} - 1 - itx)\,\kappa(dx) \tag{4}$$

とおくと，

$$\varphi^{(1)}(t) = \varphi(t)\Theta^{(1)}(t) \tag{5}$$

となる．従って，$\Theta^{(k)}(t)$ が求まれば，

$$\varphi^{(k)}(t) = \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}\varphi^{(1)}(t) = \sum_{\ell=0}^{k-1} {}_{k-1}C_{\ell}\,\varphi^{(\ell)}(t)\,\Theta^{((k-1-\ell)+1)}(t) \qquad (k = 2, 3, 4) \tag{6}$$

なる関係式より，$\varphi^{(k)}(t)$ が順次計算出来る．

(4) の右辺第 3 項が t について 4 階微分可能で，その各段階で微分と κ による積分の順序が交換出来る (詳しくは，[Steutel and Harn(2004)]179-180 頁参照) ので，

$$\Theta^{(1)}(t) = ib' - ct + i\int_{\mathbb{R}} x(e^{itx} - 1)\,\kappa(dx) \tag{7}$$

$$\Theta^{(2)}(t) = -c - \int_{\mathbb{R}} x^2 e^{itx}\,\kappa(dx) \tag{8}$$

$$\Theta^{(3)}(t) = -i\int_{\mathbb{R}} x^3 e^{itx}\,\kappa(dx) \tag{9}$$

$$\Theta^{(4)}(t) = \int_{\mathbb{R}} x^4 e^{itx}\,\kappa(dx) \tag{10}$$

が得られる．特に，$\Theta^{(1)}(0) = ib'$ であり，(5) より $\varphi^{(1)}(0) = ib'$ となるから，

$$b' = \mathrm{E}[\,X\,] \tag{11}$$

となることが分かる．

$Y = X - \mathrm{E}[\,X\,]$ とおき，その特性関数を $\varphi_Y(t)$ とし，$\Theta_Y(t) = \ln\varphi_Y(t)$ とおくと，

$$\varphi_Y^{(1)}(0) = i\,\mathrm{E}[\,Y\,] = 0, \quad \Theta_Y^{(1)}(0) = \varphi_Y^{(1)}(0) = 0 \tag{12}$$

である．また，$\varphi_Y(t) = \mathrm{E}[\,e^{it(X-\mathrm{E}[\,X\,])}\,] = e^{-it\mathrm{E}[\,X\,]}\,\varphi(t)$ であるから，$\Theta_Y(t) = -it\mathrm{E}[\,X\,] + \Theta(t)$ であり，よって，

$$\Theta_Y^{(k)}(t) = \Theta^{(k)}(t) \qquad (k = 2, 3, 4) \tag{13}$$

が成り立つ．

$\varphi_Y^{(k)}(0) = i^k\,\mathrm{E}[\,(X - \mathrm{E}[\,X\,])^k\,]$ であるから，$\varphi_Y(t)$ に関する (6) と同様の関係式に (12), (13), (8)〜(10) を当てはめて，次のよく知られた結果が得られる．

命題 1 ([Steutel and Harn(2004)] 第 4 章定理 7.4)　無限分解可能分布に従う確率変数 X が $\mathrm{E}[\,X^4\,] < \infty$ を満たすとすると，その特性関数 $\varphi(t)$ は次の形のレヴィの標準形を持つ．

$$\varphi(t) = \exp\left\{ i\,\mathrm{E}[\,X\,]\,t - \frac{c}{2}t^2 + \int_{\mathbb{R}} (e^{itx} - 1 - itx)\,\kappa(dx) \right\}$$

ここに，$c \geqq 0$,　κ は $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} (x^2 \wedge 1)\,\kappa(dx) < \infty$ かつ $\kappa(\{0\}) = 0$ なる $\mathbb{R}$ 上の測度

そして，2 次から 4 次までの中心積率は次のように表せる．

$$\mathrm{E}[\,(X-\mathrm{E}[\,X\,]\,)^2\,] = -\Theta^{(2)}(0) = c + \int_{\mathbb{R}} x^2\,\kappa(dx)$$

$$\mathrm{E}[\,(X-\mathrm{E}[\,X\,]\,)^3\,] = i\,\Theta^{(3)}(0) = \int_{\mathbb{R}} x^3\,\kappa(dx)$$

$$\mathrm{E}[\,(X-\mathrm{E}[\,X\,]\,)^4\,] = 3\left(\Theta^{(2)}(0)\right)^2 + \Theta^{(4)}(0) = 3\left(c + \int_{\mathbb{R}} x^2\,\kappa(dx)\right)^2 + \int_{\mathbb{R}} x^4\,\kappa(dx)$$

[Steutel and Harn(2004)] 第 4 章定理 7.4 は，命題 1 と述べ方が異なるが本質的に同等である．すなわち，本稿で紹介した形と異なるレヴィ測度を用いて，$\Theta^{(k)}(0)/i^k$ で定義されるキュムラントについて，(7)〜(10) で $t=0$ とした場合に対応する結果を述べている．また，平均および 2 次の中心積率については，[佐藤 (1990)] の例 5.2.11 にも述べられている．

命題 1 を用いて本稿の目的である命題 2 を述べる．

命題 2　無限分解可能分布に従う確率変数 X が $\mathrm{E}[\,X^4\,] < \infty$ を満たすとする．このとき，X の尖度は 3 以上であり，3 に等しいのは正規分布のときに限る．

また，レヴィ測度が $(\,0,\infty)$ 上に集中している場合，X の歪度は非負であり，さらに，ルベーグ測度が 0 ではない $(\,0,\infty)$ のある部分集合のレヴィ測度が 0 でないときは，歪度は正である．

証明　X の特性関数 $\varphi(t)$ のレヴィの標準形は命題 1 のとおりである．命題 1 より，

$$X\text{の歪度} = \frac{\mathrm{E}[\,(X-\mathrm{E}[\,X\,]\,)^3\,]}{\mathrm{E}[\,(X-\mathrm{E}[\,X\,]\,)^2\,]^{\frac{3}{2}}} = \frac{\int_{\mathbb{R}} x^3\,\kappa(dx)}{\left(c + \int_{\mathbb{R}} x^2\,\kappa(dx)\right)^{\frac{3}{2}}}$$

となるから，レヴィ測度が $(\,0,\infty)$ 上に集中している場合，すなわち $\kappa(\,(-\infty,0)\,) = 0$ であれば，X の歪度は非負であることが分かる．さらに，ルベーグ測度が 0 ではない $(0,\infty)$ のある部分集合 A に対して $\kappa(A) \neq 0$ であれば，歪度は正である．

また，

$$X\text{の尖度} = \frac{\mathrm{E}[\,(X-\mathrm{E}[\,X\,]\,)^4\,]}{\mathrm{E}[\,(X-\mathrm{E}[\,X\,]\,)^2\,]^2} = 3 + \frac{\int_{\mathbb{R}} x^4\,\kappa(dx)}{\left(c + \int_{\mathbb{R}} x^2\,\kappa(dx)\right)^2} \geqq 3$$

である．最後の不等式で等号が成り立つのは，$\displaystyle\int_{\mathbb{R}} x^4\,\kappa(dx) = 0$ かつ 2 つ目の等号の右辺第 2 項の分母が 0 でないときに限る．$\kappa(\{0\}) = 0$ であるから，1 つ目の条件は $\kappa = 0$ を意味し，この場合 2 つ目の条件が成り立つには $c > 0$ でなければならない．よって，

$$\varphi(t) = \exp\left(i\,\mathrm{E}[\,X\,]\,t - \frac{c}{2}\,t^2\right) \qquad (c > 0)$$

となり，これは正規分布の特性関数に他ならない．

(証明終)

なお，前稿で引用した [Nguyen et al.(2003)] で，一般逆ガウス分布の歪度が正であることが複雑な計算により示されていたが，[増田 (2002)]177 頁に述べられているように一般逆ガウス分布のレヴィ測度は絶対連続で $(0,\infty)$ 上に集中しているので，上の結果からも歪度が正であることが従う．

参考文献

[佐藤 (1990)] 佐藤健一 [1990],「加法過程」，紀伊国屋書店

[増田 (2002)] 増田 弘毅 [2002],「GIG 分布と GH 分布に関する解析」,『統計数理』，第 50 巻第 2 号 165-199 頁，統計数理研究所 (http://www.ism.ac.jp/editsec/toukei/pdf/50-2-165.pdf からダウンロード可能)

[水野 (2009)] 水野 敬 [2009],「NIG 分布：非正規分布を身近なものにするために」,『リスクと保険 (2009)』，39-85 頁，日本アクチュアリー会

[Nguyen et al.(2003)] Nguyen, T.T., J.T.Chen, A.K.Gupta, and K.T.Dinh [2003], ”A proof of the conjecture on positive skewness of generalized inverse Gaussian distribution”, *Biometrika*, Vol.90, pp.245-250

[Steutel and Harn(2004)] Steutel, F.W. and K.V. Harn [2004], *Infinite Divisibility of Probability Distributions on the Real Line*, Marcel Dekker

Supplement to “NIG Distribution: Towards Non-Normal Distribution at Hand” in Risk and Insurance 2009

Takashi Mizuno

The Gibraltar Life Insurance Co., Ltd.
The Prudential Tower, 2-13-10, Nagata-cho, Chiyoda-ku, Tokyo, 100-8953

Abstract

In my article, “NIG Distribution: Towards Non-Normal Distribution at Hand”, published in Risk and Insurance 2009, it was shown as Proposition 2.5 that the kurtosis of GH distribution is greater than 3 if generalized inverse Gaussian distribution has kurtosis greater than 3. Regretfully, the “if” part could not be verified and the proposition was left incomplete.

Generalized inverse Gaussian distribution is known to be infinitely divisible. It can be shown that the kurtosis of any infinitely divisible distribution is equal to or greater than 3 and the equality is valid only for normal distribution. It implies the validity of the “if” part of the aforementioned proposition. However, since GH distribution is also infinitely divisible, its kurtosis being greater than 3 is directly derived.

The above property of infinitely divisible distributions is implicitly described in a book on that class of distributions. Here, I would like to describe it explicitly and complement my previous article.