

年金負債固有リスクと金利期間構造リスクを考慮した LDIの再評価*

乾孝治†

2010年10月20日投稿

2011年2月23日受理

概要

本稿では、LDIの本質は負債にマッチする資産構築であるとして、LDIのヘッジ戦略を実践する上での重要な論点について検証した。まず、仮想的な企業年金制度に関する負債固有のリスクを評価し、またそのヘッジ戦略に関連する金利期間構造のモデルリスクを評価した結果、それらは金利リスクに比べて無視できない程に大きいことが示唆された。さらに、より実際的な条件の下で金利スワップによる代表的なヘッジ戦略の精度を評価したところ、取引コストの影響は無視できない程に大きく、負債固有のリスクや戦略の見直しに関する柔軟性を考慮すると、厳密な負債ヘッジを達成することは簡単でないという示唆が得られた。また、ヘッジ効果の支配的要因として採用するスワップの年限も重要であり、長期のスワップを利用した戦略が優れた結果を示した。結局のところ、LDIの名の下で複雑なヘッジ戦略を選択することと、単純な資産デュレーションの長期化には大差がないと思われることを指摘した。

キーワード：LDI, ALM, 金利スワップ, 金利期間構造, キーレート・デュレーション

1 はじめに

1.1 LDIとは

白杵 [2007] が「LDIはSharpe¹やLeibowitz²らが20年前に主張したALMの看板を掛け替えたに過ぎない」と指摘した通り、米国でFAS87（財務会計基準87号）が導入された80年代には、既に時価評価した資産と負債のマッチングに基づくリスク管理の方法が提案されていた。しかし、同時に白杵 [2007] は、従来のALMになかったLDIの特徴として次の3点を指摘している。

1. 資産のキャッシュフローやデュレーションを負債に合わせるために、長期債の現物だけでなくスワップやオプションなどのデリバティブを活用する。

*本稿は日本保険・年金リスク学会2010年度研究発表大会で発表した論文「期間構造リスクを考慮したLDIの再評価」を加筆修正したものである。同研究発表会では座長の白杵政治氏（ニッセイ基礎研究所）をはじめとして多くの貴重なコメントを頂いた。ここに記して感謝の意を表したい。

†明治大学グローバルビジネス研究科，〒101-8301 東京都千代田区神田駿河台1-1 14号館 B718。Email: inui@kisc.meiji.ac.jp

¹Sharp and Tint[1990], "Liabilities - A New Approach," *Journal of Portfolio Management*, 16(2), pp4-10.

²LiebowitzはALMに関連する論文をFinancial Analysts Journal等に数多く発表しているが、それらは"Investing(1992)"に体系的にまとめられている。

2. 負債に対する資産ベンチマークの乖離リスク（パッシブリスク）と資産ベンチマークからのアクティブリスクを統合的に管理するためにリスクバジェットリング³の手法を取り入れている。
3. わが国における従来の年金 ALM では責任準備金（予定利率で計算される必要積立額）を負債としていたが、LDI では市場金利で計算した負債時価としている。

1 はその他の LDI 関連文献においても共通の認識である。2 のリスクバジェットリングについては北村 [2004] の指摘にもあるとおり、リスク管理の実行性を高めるためにステークホルダーの対話に利用されるプロセスであって、必ずしも理論やモデルに新規性があるわけではなく、LDI の特徴であっても LDI に固有の方法ではない。3 については、わが国の年金 ALM が、当初年金積立金会計のバランスシートで考えられてきたという事情があって、ALM が財務会計の PBO のような負債時価に適さない接近法という訳ではないだろう。

したがって、少なくとも本稿では、LDI の本質は「評価時点の市場金利を使って時価評価した資産と負債のマッチングを図るために、金利デリバティブを使用したヘッジ戦略を活用するリスク管理指向型投資手法」と理解して議論を進める。

1.2 LDI の方法

LDI におけるマッチング資産の構築においては、従来の ALM と同様にデュレーション・マッチングやキャッシュフロー・マッチングといった確定的キャッシュフローのヘッジ手法が応用される。

例えば、末吉 [2005] はマッチング資産方法として金利スワップによるキャッシュフロー・マッチングを推奨している。相対取引である金利スワップのメリットは交換するキャッシュフローを自由に設計できる点にあり、オーダーメイドの金利スワップを利用すれば、簡単に負債の給付キャッシュフローを複製できると述べている。また、「デュレーションヘッジ型の LDI ファンドが存在するが、活用の途は狭い。大きくイールドカーブが平行シフトした場合にコンベクシティリスクが顕在化する点、また平行シフト以外の金利変動リスクに対して無力である点が要因となり、時価評価の負債に対するヘッジエラーが大きく発生する恐れがある」といった指摘もあり、LDI のマッチング資産構築にはキャッシュフロー・マッチングが最適だと考えているようである。

一方、白杵 [2007] は完全なマッチング資産の構築は難しいので、年限が異なる複数の金利スワップを組み合わせてデュレーションやコンベクシティを可能な限り債務に近づけていくが、将来発生する債務とのずれを常に修正する必要がある、それが簡単でないと指摘している。また、「イールドカーブが平行にシフトしないことを考えると、年限の異なる金利変動への感応度（キーレート・デュレーション）の管理が必要となる」としており、単純なデュレーションマッチングの限界を指摘すると同時にキーレート・デュレーションマッチングがより適切なヘッジ戦略である可能性を示唆している。

Adams and Smith [2009] はデュレーションマッチングによるマッチング資産構築に必要な金利スワップの想定元本の計算式を具体的に示しているものの、実際には計算で求められる理論値よりも少ない想定元本による部分ヘッジから始めるべきであるとしている。その理由としては、デリバティブを利用する投資戦略で損失が生じる可能性がある場合には、年金運営に関わるすべての利害関係者に対して負っている受託者責任の観点からすると、同じ損失であっても超過ヘッジによる損失よりも過小ヘッジによる損失が望ましいからだとして説明している。また、他の論文と同様に、実際のイールド

³最適資産配分を決定する方法ではあるが、従来の方法がリターンを出発点とするのに対し、リスクを出発点とすることによってリスク管理の実効性を高める方法と考えられている。詳細は北村 [2004] を参照。

カーブは平行シフトだけではないことや、負債には金利以外のリスク（例えばインフレリスク）があることなどについての注意も喚起している。

日米を代表する実務家向けジャーナルに採用された論文を引用して LDI の方法を概観したが、共通しているのは、古くから知られている確定的キャッシュフローのリスク管理方法を応用すること、そして、それらには限界があることを認めていることである。また、年金負債固有のリスクや、金利期間構造変動の複雑性、さらに、年金キャッシュフローの超長期性や LDI 戦略の構築・維持に必要なコストの影響など、ヘッジ精度を低下させる原因について指摘している論文はあるものの、現実的な条件の下でヘッジ戦略の精度を検証している報告は見あたらないようである。

1.3 LDI を実践する上での問題

年金負債の時価は必ずしも一意に定まるものではない。そもそも、年金負債に影響するあらゆるリスクを勘案した完備なモデルを示し、条件付き請求権として一意の評価額を示すことは不可能であろう。一般的には、年金財政計算の方法に従い割引率や死亡率などの計算基礎率を仮定して将来の給付キャッシュフローを予測し、現時点までの勤務で確定している部分について適切な金利で割り引いて求めた現在価値合計を負債時価として扱うという方法、すなわち予測給付債務（PBO）の計算方法に従うのが一般的であろう。本稿においても、基本的には PBO 計算の方法に従うが、金利スワップを利用したヘッジ戦略を適切に評価するためには、金利の期間構造の概念を用いる必要があるため、負債時価評価に際しても、全ての年限に共通の割引金利を用いるのではなく、評価時点の金利の期間構造を使用することとした。

このような負債時価に対して LDI の有効性を検証するため必要な論点を以下に示す。

1.3.1 基礎率変更による年金負債時価のリスク

年金財政運営において計算基礎率は定期的な見直しを前提とした仮定の数値であり、財政再計算において見直された場合には、当然の結果として負債キャッシュフロー予測は修正され、負債時価も変化する。したがって、負債のヘッジ戦略を決定するにあたっては、基礎率変更が負債時価へ及ぼす影響を事前に把握し、金融市場でヘッジ可能なリスクがどの程度であるかを理解しておくことは重要である。例えば、基礎率変更による影響が少ない制度（例えば閉鎖型年金など）においては、厳密なキャッシュフローマッチングが有効である可能性が高いが、そうでない場合には、負債の特性変化にも柔軟に追随できるシンプルなヘッジ戦略が望ましいと思われる。ヘッジ戦略の柔軟性は、取引コストを負担しながら長期的にヘッジポジションを修正・維持しなければならない年金などの投資主体においては特に重要な要件であると思われる。

1.3.2 非観測領域の金利期間構造の推定

年金給付のキャッシュフローは非常に長期に及ぶため、その割引現在価値を求めるためには、国債や金利スワップ市場で観測できる金利の最長年限を超える非観測領域の金利期間構造についても、何らかの方法で決定する必要がある。

実務で一般的に用いられる方法は、超長期のフォワードレートは一定値に収束することを仮定して、観測可能な最長年限のフォワードレートをそのまま非観測年限に引き延ばす方法（ナイーブ法）だろう。

その他には、Richardson の外挿法⁴の応用（外挿法）や、Nelson and Siegel[1987] や Svensson[1994] などに代表されるような $[0, \infty)$ を定義域とする多項式で期間構造を近似・推定する方法（関数法）などがある。どれが最適な方法であるかを判断することは簡単でないが、選択するモデルに応じてヘッジ戦略の効果が異なる可能性もあり、こうしたモデル選択リスクを具体的に把握しておくことも重要だろう。

1.3.3 現実的で無裁定な金利期間構造モデルの仮定

先行研究でも指摘されている通り、現実の金利期間構造変動はパラレルシフト（平行移動）に限定できないため、デュレーション・マッチングに高精度のヘッジを期待すべきではない。そのため、より複雑なキーレート・デュレーション・マッチングを推奨する意見もあるが、現実的な条件下での優位性については明らかではない。

特定の戦略の有効性を確認するためには、現実的な表現力を備えた無裁定金利期間構造モデルによるシミュレーション分析を経る必要があるだろう。しかし、これまで年金や保険のリスク評価においては、金利モデルが無裁定条件を満たす必要性は強く認識されてこなかった。それは、多くの無裁定金利モデルはデリバティブ価格を一意に定める目的で開発されたこと、しかし現実の市場で観測される金利の挙動（例えば超長期のフォワードレートなど）は完全に無裁定条件を満たすものではないこと、さらに長期的に観察される価格過程の非正規・非定常性を取り入れた無裁定モデルを提案することが簡単でないこと、などの問題があるからだと思われる。⁵ しかし、LDI では満期の異なる金利スワップを複数利用するため、年限の異なる金利が完全相関するタイプのモデル（Vasicek などのシングルファクター・モデル）は戦略評価の要件を満たさない。さらに、将来の金利シナリオが初期の期間構造（スワップ金利）に対する無裁定条件を満たさないと、そのことを主な理由として特定のヘッジ戦略が有利に判定されてしまう可能性がある。そこで本稿では、初期の期間構造に関する無裁定条件を満たしながら、複雑な期間構造変動を表現できるマルチファクター・モデルによる検証が必要と考え、後述する 2 ファクター・アフィン HJM モデルを採用した。

1.3.4 信用リスク、取引コストの問題

金利スワップは契約者同士が違いの信用リスクを負担することになるため、通常は信用リスクが低下した場合の担保の差し入れに関する契約条項（CSA : Credit Support Annex）が付帯される。すなわち、金利スワップ契約のネット時価評価が大きく含み損になっている状態で、基金の母体企業が格下げされるなどした場合には、有価証券を担保として供出することになるので、そういった対応が可能であることが金利スワップ契約締結の条件になるだろう。しかし、近年の信用リスクの高まりを受けて、信用力の高い投資家（例えば保険会社など）以外とは超長期の金利スワップを締結しない銀行も増えており、この点に限っても LDI を実践できる年金は限られているだろう。⁶ また、年金基金が主体的に金利スワップ取引を行う場合には、金融機関同士とは異なる厚めのビット・オファー・スプレッドが取引コストとして課されることになるため、その影響についても考慮しておく必要がある

⁴Brezinski and Wuytac[1991] を参照。

⁵Hibbert, Mowbray and Trunbull[2001] は、モデルが備える特徴として無裁定条件を犠牲にすることでより分析目的に適したモデルが作れるとしている。（P12 から引用”There may be times when the modeller will be prepared to allow some limited arbitrage into a model in exchange for some other benefit.”）

⁶近年の信用リスクの高まりを受けて、取引相手の信用力や担保の有無などを取引価格（もしくは価格評価のための金利期間構造）に直接反映させる方法である CVA（Credit Valuation Adjustment）が注目されている。金利スワップにおける CVA の効果については桜井 [2011] などを参照せよ。

だろう。仮に信託銀行などの資産管理者が基金に代わって自ら信用リスクを負うことでLDIのヘッジ戦略を代行する場合であれば、ビッド・オファー・スプレッドは極小に抑えられるだろうが、そのリスク負担や代行サービスに応じたコストを年金基金に求めるはずなので、やはり長期にわたって累積されるコストについても慎重な検討が求められよう。

続く第2章では、基礎率変更に伴う年金負債時価のリスクについて検討しヘッジ可能な金利リスクとの関係を考察する。第3章では市場で観測不可能な超長期の金利期間構造の推定に関わるモデルリスクについて、過去データに基づくシミュレーションによりナイーブ法と外挿法を比較し、あわせて代表的ヘッジ戦略の精度について考察する。第4章では、現実に近い表現力のあるマルチファクタータイプの金利期間構造モデルを提示し、多期間のシミュレーションを実効することによって、取引コストやリバランスの効果、インフレ率の影響などがヘッジ戦略の精度に及ぼす影響について検討する。そして第5章において結果を総括し本稿の主張をまとめたい。

2 基礎率変更に伴う年金負債リスクの評価

前述の通り、本稿では年金財政計算の方法に従い将来の給付キャッシュフローを予測し、現時点で確定している部分について評価時点の金利期間構造により求めた現在価値合計（PBO=予測給付債務）を負債時価とする。⁷

負債時価を計算するためには、予定利率、予定死亡率、予定加入・脱退率、予定昇給率、さらに夫婦連生年金の場合には既婚率や配偶者の死亡率についての仮定が必要であるが、ここでは、仮想的な企業年金制度を想定し、予定利率以外の基礎率が変更された場合の負債時価に及ぼすインパクトを計測する。例えば予定昇給率や脱退率などについては、市場金利と連動が期待でそうなインフレや景気などと関連づけて扱うべきかもしれないが、かえって結果の解釈が難しくなるかもしれないので、ここでは金利との関係性を考慮せずに基礎率の単純な変更が負債時価変に及ぼす影響を計測する。

2.1 仮想的な企業年金のモデル

本稿で仮定した企業年金制度の概要と基礎率の詳細については以下の通りである。

- 制度の構成員
従業員は20歳から60歳までの男性とし、受給者を含めた構成員の合計数は初期時点で5000人とした。年齢分布は図1(a)に示した通りである。なお、新規および中途採用は行わない閉鎖型年金とした。
- 給与
初期時点の給与は、厚生労働省の賃金構造基本統計調査（平成21年、大企業・男性）を参考にして（ただし、50歳以上の給与については独自に変更しているので注意せよ）、年齢に応じて決まる単一テーブル（図1(b)）を仮定した。

⁷ 予測給付債務の計算方法については、企業会計基準適用指針公開草案第35号「退職給付に関する会計基準の適用指針（案）（H22.3.18）」の「[設例1] 退職給付債務及び勤務費用の計算例（期間定額基準）-退職一時金制度」を参考にした。

- 年金給付額の算定式

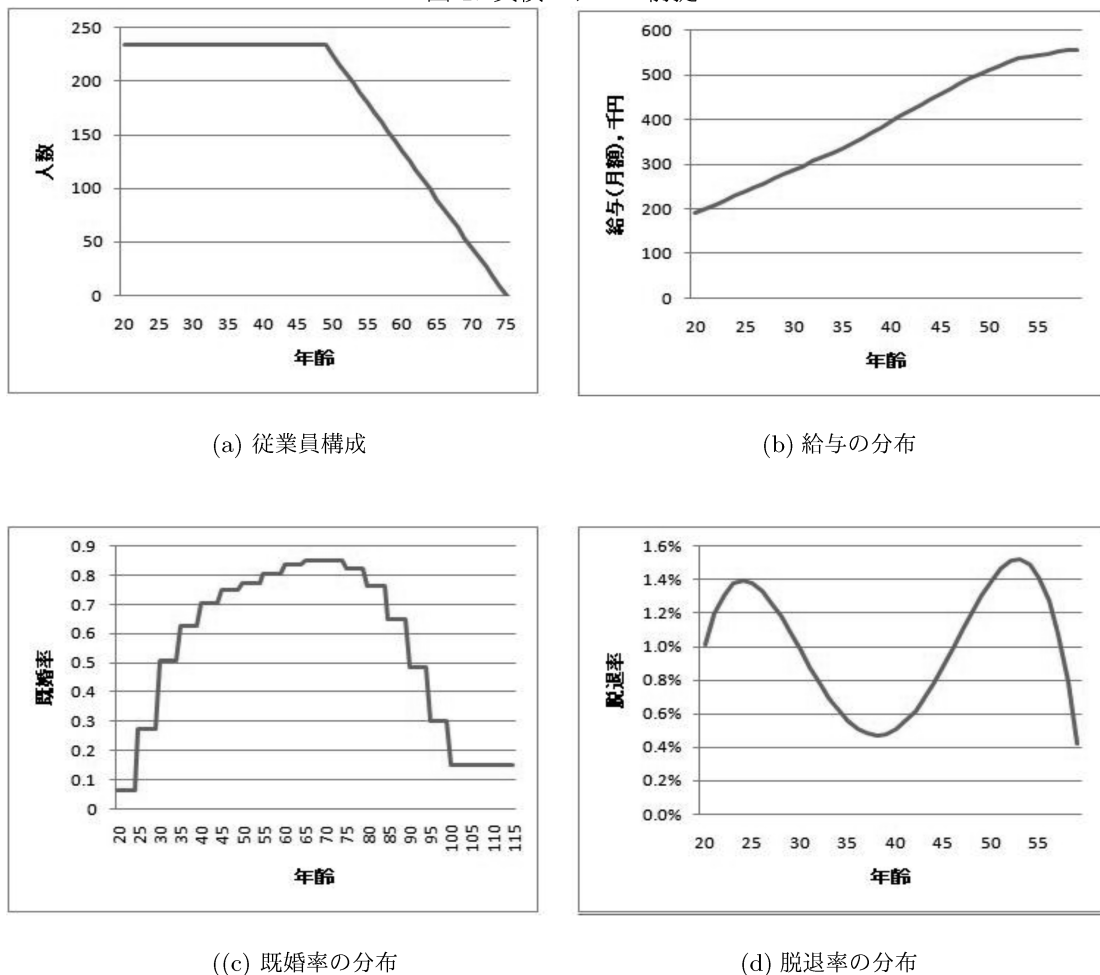
勤続 20 年で受給権が生じることとしたが、中途採用を想定していないので 40 歳以上の退職者は年金受給権を獲得する。年金給付額は退職時給与と退職時年齢を参照して決まる掛率による以下の式の通りとしたが、例えば、昇給率が 0 であれば、60 歳定年退職の年金額は約 108 万円となる。

$$\text{年金額} = \text{退職時給与} \times \min(\text{退職時年齢} - 30, 25) \times \frac{72}{1000}$$

- 計算基礎率の標準シナリオ

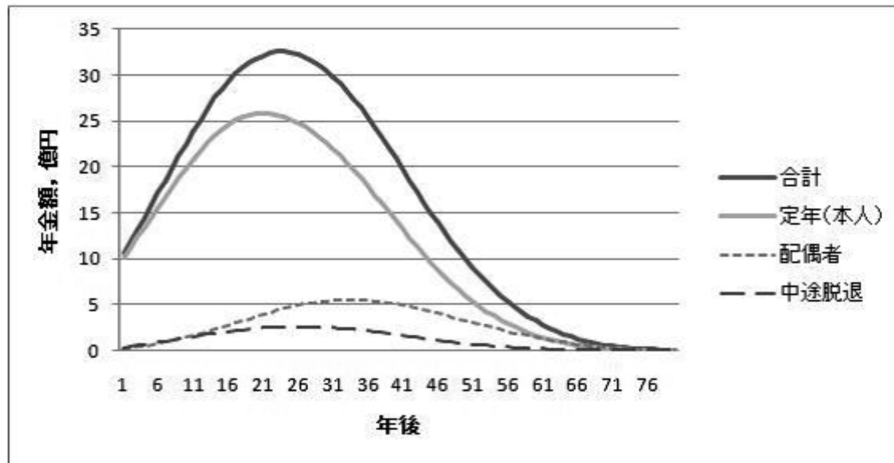
予定利率は 3%，昇給率は 0% とした。従業員および夫婦連生年金における妻の死亡率については第 20 回完全生命表を参照した。既婚率については、国立社会保障・人口問題研究所の配偶関係別人口（2000 年）の男性・有配偶者数を参考に作成した（図 1(c)）。脱退率は年齢に応じたピークが 2 つあることを仮定し、適当な多項式（4 次関数）で全年齢の平均値が 1% になるように作成した（図 1(d)）。

図 1: 負債モデルの前提



この負債モデルで予測した負債キャッシュフローを図 2 に示した。

図 2: 負債キャッシュフロー（標準シナリオ）



2.2 負債時価の変動リスク評価

2.2.1 各基礎率のインパクト

計算基礎率の標準シナリオについて、死亡率、脱退率、既婚率、昇給率を適当に変化させた場合に、負債時価がどの程度変化するかを調べた。それぞれの基礎率の変更シナリオについては、実際の企業年金制度固有の事情を勘案して決めるべきであるが、ここでは適当に決めている。

結果は表 1 から 4 に示した通りである。結果を概観すると、経験的に知られている通り昇給率変化の影響がその他に比べて大きいことが確認できる。既婚率や脱退率については、実際のところどの程度の変動を見込むべきか明らかではないが、いずれにせよ既婚率や脱退率が 3 から 5 割程度の変化であれば PBO への影響は 5% 以下である。一方、死亡率については、別途、第 18, 19, 20 回の生命表を使って、本稿年金モデルの従業員年齢構成比率で死亡率の加重平均を求めたところ、第 18 回から第 19 回にかけては -2.6%、第 19 回から第 20 回にかけては -4.8% の減少率であった。これを参考にすれば、死亡率については最大でも 1 割程度の変動可能性を見込めば十分と思われるが、表 1 を見ると、死亡率が 1 割増減したところで PBO の変化はわずかに 2.5% 程度である。

2.2.2 最悪シナリオのインパクト

基礎率変更の相乗的効果を検討するために、各基礎率変化の符号条件を考慮の上で最悪シナリオを想定し、その影響を調べた（表 5）。結果を見ると、基礎率の不確実性に起因する総合的なリスクとしては、最悪の場合で負債時価を 10% 程度変動させる可能性を見積もることは不自然ではないと思われる。

PBO が 10% 変動することの意味を確認するために、以下の試算を行った。この年金モデルにおける標準シナリオで求めた負債キャッシュフローについて、1997 年から 2009 年までの毎年 9 月末の市場金利（スワップ金利から求めた割引金利で非観測領域はナイーブ法で推定）で負債時価を評価し、その 13 サンプルで年率ボラティリティを計測したところ約 10% であり、（資産を固定して考えれば）サープラスリターン（サープラス/負債時価）への寄与度は、VaR（95% 信頼水準）に換算する

と $(1.645 \times 10\% =)$ 16%程度であることが見込まれる。したがって、基礎率変動のインパクトは、金利変動リスクの VaR の約 6 割強に相当するもので、無視できない水準であると言えるだろう。

2.2.3 昇給率上昇リスクへの懸念

基礎率変更リスクの最大の原因は昇給率であるが、これはインフレ率に連動するものであり、期待インフレは名目金利の一部として観測される（フィッシャー効果）。よって、実質金利の変動性にも依存するが、インフレと名目金利は正の相関関係があるとも考えられる。したがって、金利上昇とインフレ上昇は同時に起こる可能性が高いことになるが、その場合には金利リスクを完全ヘッジしたマッチング資産は負債と連動して時価が下落するが、一方でインフレ上昇が起きる可能性が高いので（昇給率の上昇を通じて）負債時価の上昇を引き起こし、サープラスを大きく損ねる結果となることが予想される。簡単に言えば、インフレリスクを想定する場合に金利リスクの厳密なヘッジを行うことは、結果的にインフレリスクを大きく取っていることになる可能性があると言えるだろう。この点については第 5 章のシミュレーション分析で再度検討する。

表 1: 死亡率

倍率 (*)	PBO	PBO 変化率	Duration
0.7	679	8.52	21.4
0.8	659	5.38	21.8
0.9	642	2.56	22.2
1.0 ^(S)	625	0.00	22.7
1.1	611	-2.36	23.1
1.2	597	-4.54	23.6
1.3	584	-6.56	24.1

(*) 標準シナリオ (S) の死亡率に対する倍率
PBO の単位は億円

表 3: 既婚率

倍率 (*)	PBO	PBO 変化率	Duration
0.7	603	-3.56	21.1
0.8	611	-2.38	21.2
0.9	618	-1.19	21.3
1.0 ^(S)	625	0.00	21.4
1.1	633	1.19	21.5
1.2	640	2.38	21.6
1.3	648	3.56	21.7

(*) 標準シナリオ (S) の既婚率に対する倍率
PBO の単位は億円

表 2: 脱退率

倍率 (*)	PBO	PBO 変化率	Duration
0.33	645	3.14	21.8
0.5	640	2.32	21.7
0.8	631	0.91	21.5
1.0 ^(S)	625	0.00	21.4
1.2	620	-0.88	21.3
1.5	612	-2.15	21.2
2.0	600	-4.15	20.9
3.0	577	-7.72	20.4

(*) 標準シナリオ (S) の脱退率に対する倍率
PBO の単位は億円

表 4: 昇給率

昇給率 (*)	PBO	PBO 変化率	Duration
0.0% ^(S)	625	0.00	21.4
0.5%	651	4.07	21.8
1.0%	679	8.51	22.2
1.5%	709	13.37	22.7
2.0%	742	18.70	23.1
2.5%	779	24.55	23.6
3.0%	819	31.00	24.1

(*) 標準シナリオ (S) の昇給率は 0.0%
PBO の単位は億円

表 5: 最悪シナリオ

昇給率	死亡率 (倍率)	脱退率 (倍率)	既婚率 (倍率)	PBO	PBO 変化率	Duration
1.0%	0.9	0.7	1.2	724	15.67	22.9
0.5%	0.9	0.7	1.2	693	10.80	22.5
0.0%	0.9	0.7	1.2	665	6.34	22.1
0.0% ^(S)	1.0	1.0	1.0	625	0.00	21.4
0.0%	1.1	1.3	0.8	588	-6.01	20.8

(倍率) は基準シナリオ (S) に対する倍率, PBO の単位は億円

3 金利期間構造の推定に関わるモデルリスク

ここでは負債キャッシュフローのリスクを考慮しない場合について、実際のスワップ金利から推定した金利期間構造によるヒストリカルシミュレーションにより、基本的なヘッジ戦略の効果を測定し、あわせて超長期の非観測領域における金利期間構造のモデルリスクについて検討する。

3.1 非観測領域の金利期間構造の推定方法

1997年9月から2010年7月まで(155ヶ月)の金利スワップデータ(1年から30年)により、各月のフォワードレートを求め、ナイーブ法(最長期のフォワードレートをそのまま延長刷る方法)と、Richardsonの外挿法⁸による方法(25年と30年におけるフォワードレートに同外挿法を適用し、それを50年のフォワードレートと見なしてキュービックスプライン関数により補完する方法)で負債キャッシュフローの最長年限(75年)までの金利期間構造を決定した。参考として、2010年3月末における金利スワップレートから推定したフォワードレートと、そのフォワードレートを外挿し、スプライン関数で補完したグラフを図3に示す。

3.2 ヘッジ戦略の評価

ナイーブ法と外挿法で求めた金利期間構造の違いが、ヘッジ戦略の精度に与える影響を調べるため、以下の手続きに従ってヒストリカルシミュレーションを行った。

- 負債と資産の仮定

負債は第2章で仮定した仮想的な企業年金モデルの標準シナリオで求めた負債キャッシュフローを仮定し、当該月末の金利期間構造により時価を求めた。資産は満期1年から10年までの割引債券のラダー・ポートフォリオを保有しているものとし、初期時点における負債時価と資産時価が一致するように債券の額面を調整した。

- ヘッジ戦略

デュレーションマッチング、デュレーション・コンベキシティ・マッチング、およびキーレート・デュレーション・マッチングの3つのヘッジ戦略について、補論に示した方法で最適ヘッ

⁸ある条件を満たす適当な $\{x_n\}$ および t と a_i に関する連立方程式

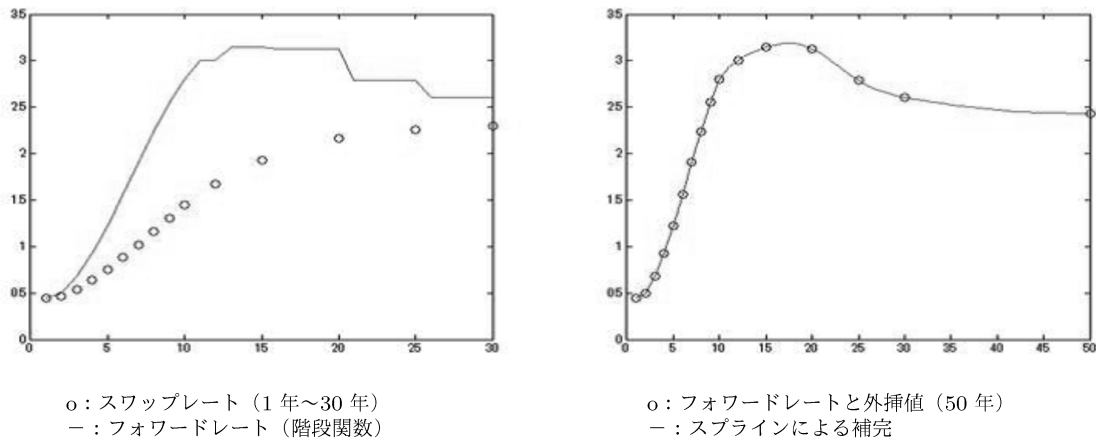
$$s_{n+i} = t + a_1 x_{n+i} + a_2 x_{n+i}^2 + \dots + a_k x_{n+i}^k, \quad i = 0, 1, \dots, k.$$

について、次のクラメル⁹の公式：

$$t = t_n^{(k)} = \frac{\begin{vmatrix} s_n & s_{n+1} & \dots & s_{n+k} \\ x_n & x_{n+1} & \dots & x_{n+k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^k & x_{n+1}^k & \dots & x_{n+k}^k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_n & x_{n+1} & \dots & x_{n+k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^k & x_{n+1}^k & \dots & x_{n+k}^k \end{vmatrix}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

により得られる新しい数列 $\{t_n^{(k)}\}$ は、 $\{s_n\}$ が s に収束するとき、 $\{t_n^{(k+1)}\}$ は $\{t_n^{(k)}\}$ よりも早く s に収束する数列である。例えば、 $x_n = 1/n$ 、 $k = 1$ とすると、 $t_1^{(1)} = -s_1 + 2s_2$ は s_1, s_2 による外挿値を与える。

図 3: 2010 年 3 月末のスワップレートから推定した非観測領域の期間構造



ジ比率 (金利スワップの想定元本) を求めた。なお、ヘッジ戦略に利用できる金利スワップは、2,5,10,20,30 年満期とし、ビット・オファー・スプレッド等の取引コストは無視した。

- ヘッジ精度の評価

ヘッジパフォーマンスを測る基準としては、信頼水準 95% の 1ヶ月 VaR とした。すなわち、当月の金利期間構造の下で、それぞれの戦略についての最適ヘッジ戦略を構築し、翌月の金利期間構造で金利スワップを含むマッチング資産の時価と負債時価を求め、サープラスリターンを計算した。これを 1997 年 9 月から 2010 年 7 月までの 154ヶ月間、毎月繰り返すことによりサープラスリターンの分布が得られる。ただし、実際のスワップレートをを用いた分析であるため、金利動向のトレンドによる影響を中立化する目的で、データ日付に関して前進・後退の両方向についてサープラスリターンを計測した (合計 308 サンプル)。結果は、ヘッジなしの場合の VaR に対する相対値として図 4 に示した。

3.3 分析結果

3.3.1 非観測領域のモデルリスク

非観測領域の金利期間構造の推定方法の違いがヘッジ精度に与える影響は、例えば、キーレート・デュレーション・マッチング: KRD(30,20,10,5,2) において顕著で、ナイーブ法が 4.7% に対し外挿法は 10.0% と約 2 倍の差異を生じる程である。ナイーブ法では非観測領域の期間構造が平行シフトになるため、そうならない外挿法よりもヘッジ効果が高いことは予想できたが、その程度は複雑なヘッジ戦略ほど大きい傾向があると言えそうである。実際問題として、非観測領域の金利推定に最適なモデルを決めることは簡単でないが、少なくともナイーブ法で推定した期間構造で戦略評価を行う場合にはヘッジ効果を過大に見込む可能性があることを念頭に入れておくべきだろう。

3.3.2 ヘッジ戦略の精度

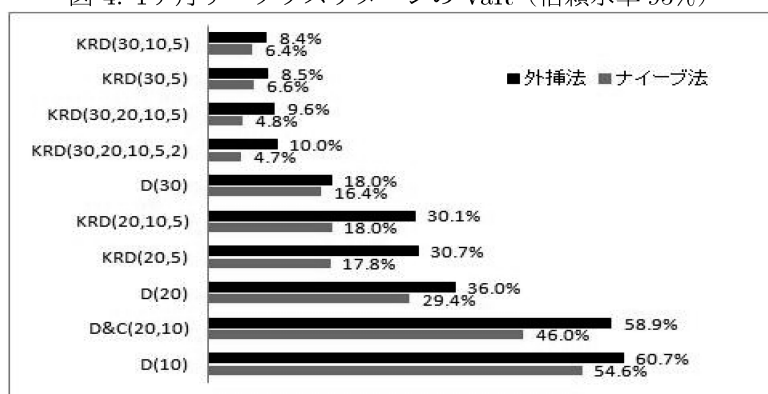
続いてヘッジ戦略の精度を比較する。デュレーション・マッチングとキーレート・デュレーション・マッチングを比較すると、採用する金利スワップの（最長）年限が同じ場合は、キーレート・デュレーション・マッチングの方が高いヘッジ精度を示すことが確認できた。しかし、20年以下のスワップを使ったキーレート・デュレーション・マッチング（KRD(20,10,5), KRD(20,5) など）と30年スワップによるデュレーション・マッチング（D(30)）を比較すると、デュレーション・マッチングの方が良好な結果となっており、ヘッジ精度を決める支配的な要因としては、ヘッジ戦略の緻密さよりも、採用する金利スワップの「長さ」が重要であると言えよう。

一方で、

- デュレーション・コンベキシティ・マッチング（D&C(20,10)）は10年スワップによるデュレーション・マッチング（D(10)）よりも長期のスワップを利用しているもののヘッジ精度は同程度である。
- キーレート・デュレーション・マッチングで採用するスワップの数の違いを比較すると、ナイーブ法で推定した期間構造においては、より多くのスワップを使った法が良好であるが、外挿法で求めた期間構造で評価した場合は、5つのスワップを使用する場合（KRD(30,20,10,5,2)）よりも、より少ないスワップを使用した場合の方が良好な結果を示している。

など、解釈が簡単でない結果が含まれているが、採用したデータ期間はゼロ金利規制やその解除・再設定、さらに低位誘導の期間を含んでいたことなどが影響していると思われる。すなわち、金利の期間構造の短期領域の動きが断続的だったことと、さらに全期間を通して短期金利が低位水準にアンカーされていたために、中期領域の変動は通常期間構造変動の支配的要因とされるパラレルシフトよりもツイスト（傾きの変動）が支配的になっていた可能性が高く、そのため、デュレーションマッチングを基本とする戦略のヘッジ精度が予想外の動きを示したのではないかと推察される。

図 4: 1ヶ月サープラスリターンの VaR (信頼水準 95%)



- $D(x)$ 単一の金利スワップによるデュレーションマッチング戦略。
 x は使用した金利スワップの満期年限を表す。(以下同様)
- $D&C(x, y)$ デュレーション&コンベキシティマッチング戦略。
- $KRD(x, y, \dots)$ キーレート・デュレーションマッチング戦略。

4 実際的な条件下におけるシミュレーションによる評価

ここでは負債固有の不確実性や取引コスト、戦略のリバランスなどの影響を考慮した実際的な条件下でモンテカルロ・シミュレーションを行い、マッチング資産構築における代表的ヘッジ戦略の精度を評価する。

以下では、モンテカルロ・シミュレーションを構成する金利の期間構造モデル、資産・負債モデルおよびヘッジ戦略について説明し、モンテカルロ・シミュレーションの手順を述べる。

4.1 金利の期間構造モデル

初期のALMで採用されることの多かったIbbotson and Sinquefeld[1976]のビルディング・ブロック・モデルは、複数の資産収益率が多変量正規分布に従うモデルであったが、近年では、より複雑で多様な資産収益率をモデル化するために、非正規・非定常時系列モデルなども応用されるようになった。例えば、Hibbert, Mowbray and Trunbull[2001]に基づいて米国のアクチュアリー協会と損保アクチュアリー協会が共同開発したCAS-SOAモデルでは、株式は局面転換モデル(Regime Switching Model)で、金利の期間構造は短期と長期の2ファクター平均回帰モデルが採用されている。

LDIのように金利スワップ等のデリバティブを用いた戦略を評価するためには、デリバティブ間の相対価値が公平に評価されないと、そのことを主な理由として、特定の戦略が有利・不利に判定される可能性がある。したがって本稿では、以下に示す無裁定条件を満たすアフィンHJMモデルを利用する。同モデルは初期のフォワードレートに整合的で無裁定条件を満たす金利期間構造を生成するマルチファクターモデルであり、また、将来の任意の満期のディスカウントファクターをマルコフ状態変数を伴う明示的な式で示すことができるため、モンテカルロシミュレーションを効率的に実効できるという特徴を備えている⁹。以下でモデルの詳細を示すが、その前に本稿のシミュレーションにおける問題点を指摘したい。

4.2 2つの確率測度の問題

本稿では、確率測度に関する厳密な扱いを避けて、簡便的にリスク中立確率下における金利シナリオの下で評価を行っている。本来であれば、資産価格リスクを評価するためには2つの確率について考える必要がある。1つは実際に経験する資産価格に関する確率で、もう一つが資産価格を計算するときを利用する仮想的なリスク中立確率である。ポートフォリオのリスク評価を行うためには、将来のある時点における損益分布が必要になるが、それは、保有資産の現実の確率下における価格分布から得られるものである。リスク中立確率は、その将来時点における資産価格を計算するために必要な確率測度である。つまり、現時点を t 、評価時点を T 、扱っている金融商品の満期を τ とすると、時刻 T における価格分布を得るために、 t から T までの実確率に基づくシナリオ(情報)を所与とした場合の、 T から τ までのリスク中立確率下のシナリオに基づいた価格評価を行う必要がある。したがって、本稿で採用するHJMモデルにおいても、現時点 t から評価時点 T までについては現実の確率下におけるモデルパラメータを与えてシナリオを生成し、 T 以降に満期を迎える資産についてはリスク中立確率下のパラメータにより価格計算を行わなければならない。しかし本稿では、マルチファクターHJMモデルのパラメータ推定は簡単でないことから、仮想的なパラメータを与えて分析を行うため、2つの確率測度の違いをパラメータに反映させることができない。簡便的に、す

⁹詳細については、Inui and Kijima[1998], Chiarella and Kow[2003]などを参照してほしい。

べてリスク中立確率下のシナリオで分析を行っている。一般的には、評価時点 T が現時点 t から見て近い将来であればこうした簡便化の影響は無視できるが、本稿では 1~5 年後の期間を想定しているため、結果の信頼性が損なわれている可能性はある。ただし、本稿の HJM モデルにおける現実確率とリスク中立確率の関係は、通常のブラウン運動に関する測度変換の手続きを取っているため、その影響はドリフト項の調整として現れるはずであり、したがって、本稿ではヘッジ戦略毎の VaR を、ヘッジしない場合の VaR に対する相対値で計測することによってドリフトの違いによる影響を中立化できたものと見なしている。

4.2.1 マルチファクター・アフィン HJM モデルの詳細

Heath, Jarrow and Morton[1992] で示されたマルチファクター HJM モデルは、リスク中立確率下におけるブラウン運動 \tilde{B}_t^i を伴うフォワードレート $f(t, T)$ に関する確率過程として以下のように表される。

$$f(t, T) = f(0, T) + \sum_{i=1}^m \left[\int_0^t \gamma_i(s, T) \int_s^T \gamma_i(s, v) dv ds + \int_0^t \gamma_i(s, T) d\tilde{B}_s^i \right]$$

ただし、 $\gamma_i(t, T)$ はボラティリティ関数で、以下の条件 ($\kappa(x)$ は確定的関数)

$$\gamma_i(t, T) = \gamma_i(t, t) \exp \left(- \int_t^T \kappa_i(u) du \right)$$

を満たすとき、HJM モデルから導出されるディスカウントファクター $P(t, T)$ は $2m$ 個のマルコフ状態変数 $(Y_t^{1,i}, Y_t^{2,i})_{1 \leq i \leq m}$ をアフィン形式で取り込んでいる確率過程として以下のように表すことができる。

$$P(t, T) = \frac{P(0, T)}{P(0, t)} \exp \left\{ \beta_1(t, T) f(0, t) + \sum_{i=1}^m \left[\beta_i(t, T) Y_t^{1,i} + \frac{1}{2} \beta_i^2(t, T) Y_t^{2,i} \right] \right\}$$

ただし、

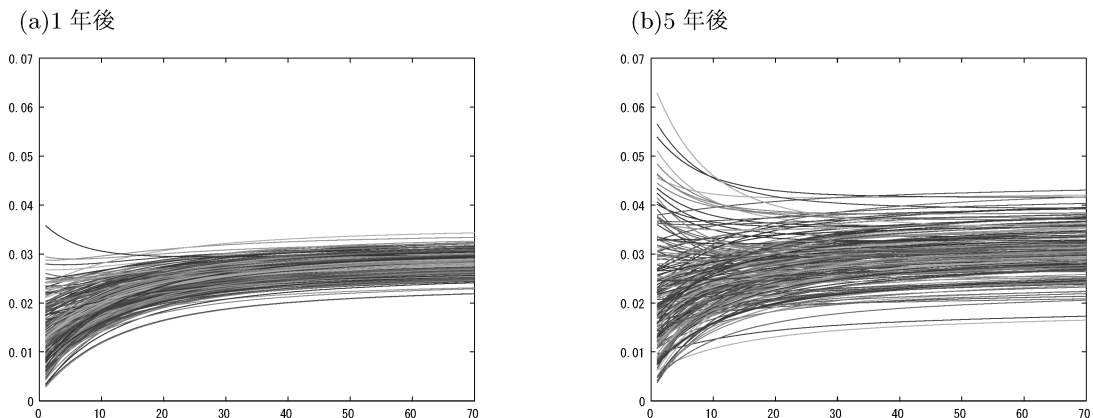
$$\begin{aligned} \beta_i(t, T) &= \int_t^T e^{-\int_t^u \kappa_i(x) dx} du, \\ dY_t^{1,1} &= \left[\frac{\partial}{\partial t} f(0, t) + Y_t^{2,1} - \kappa_1(t) \{ Y_t^{1,1} - f(0, t) \} \right] dt + \gamma_1(t, t) d\tilde{B}_t^1, \\ dY_t^{1,i} &= \left[Y_t^{2,i} - \kappa_i(t) Y_t^{1,i} \right] dt + \gamma_i(t, t) d\tilde{B}_t^i, \quad i = 2, \dots, m \\ dY_t^{2,i} &= \left[\gamma_i^2(t, t) - 2\kappa_i(t) Y_t^{2,i} \right] dt, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

このアフィン HJM モデルにおいて、 $m = 2$ の場合について $\kappa_1(t) = 0, \kappa_2(t) = \kappa$ として、ボラティリティ関数を

$$\gamma_1(t, T) = \sigma_1 r_t^\alpha, \quad \gamma_2(t, T) = \sigma_2 r_t^\beta e^{-\kappa(T-t)}$$

の通り仮定し、適当なパラメータ ($\kappa = 0.1, \sigma_1 = 0.0023, \sigma_2 = 0.04, \alpha = 0, \beta = 0.5$) を与えることで、図 5 に示したような金利シナリオを生成した。ただし、初期時点の金利期間構造 $f(0, T)$ は、短期金利の低め誘導が解除された将来を想定し、短期金利が 1% で最長年限金利が 3% である単調増加で上に凸形状を仮定している。

図 5: 2 ファクターアフィン HJM で生成したゼロイールドの分布



4.3 負債と資産のモデル

負債モデルは第2章で示した仮想的な企業年金モデル（但し夫婦連生年金部分は除外）における標準シナリオを利用する。なお、経年による死亡や脱退による構成員の移動についてもモンテカルロ・シミュレーションを行っている。¹⁰

一方、資産は、満期が1年から10年までの割引国債に等金額投資されているラダーポートフォリオを保有しているものとして、初期時点の金利の期間構造で評価した資産と負債の時価が一致するように債券の額面を調整した。

シミュレーションで生じるキャッシュフロー、すなわち、年金給付と掛金収入、債券の償還、および金利スワップに関わるキャッシュフローはすべて合算され、残額がその時点で発行される10年割引国債に投資されるものとして処理した。なお、年金の掛金収入は、初期時点における予測給付債務から計算した単年度の必要積立金に等しいものとして、シミュレーション期間中の5年間継続するものとした。

4.4 ヘッジ戦略

マッチング資産構築のために採用するヘッジ戦略は表6に示したの通りである。スワップの取引のビッド・オファー・スプレッドは、5,10,20,30年のスワップについてそれぞれ4,6,8,10ベースポイントを仮定した。¹¹例えば、固定金利受けのスワップを設定する場合には、金利モデルで生成される期間構造に対して決まるスワップ金利から、ビッド・オファースプレッドの1/2が減じられるものとして扱う。

また、リバランスは毎回全てのスワップを解約して新規にヘッジポジションを組み直すという方法で行った。スワップを解約する場合は、ビッドサイドはオファーサイドの金利で時価評価されるべき

¹⁰構成員の移動実績が基礎率の見込みから乖離することによる負債時価変動のリスクは構成員が少ないほど大きくなるはずなので、標準シナリオの1/10にあたる500人の場合について調べたが、ヘッジ戦略の精度の違いとして観測される違いは大きくなかったため、ここでは分析対象に含めなかった。

¹¹外資系金融機関のスワップ担当者へのヒアリングを参考にした。リーマンショック以降スプレッドは拡大傾向にあるとのこと。

であるが、ここでは単なる解約ではなく新規契約が伴うことから、実質的な手数料のディスカウントがあるものとして、解約に伴う損益計算はミッド・レートで行うこととした。

表 6: シミュレーションで評価するマッチング戦略

戦略	内容
D(20Y)	20 年金利スワップによるデュレーションマッチング戦略
D(30Y)	30 年金利スワップによるデュレーションマッチング戦略
KRD	キーレート・デュレーションマッチング戦略。使用するスワップは 5,10,20,30 年の 4 つ。

4.5 モンテカルロ・シミュレーションの手順

金利シナリオは、初期の金利期間構造（全てのシミュレーションで共通）と、2ファクター・アフィン HJM モデルで 1 年後から 5 年後までの（1 年毎の）期間構造を生成して利用する。

初期の期間構造の下で、各ヘッジ戦略における必要想定元本を補論に示した (1)~(4) 式で計算する。ビット・オファー・スプレッド（取引コスト）を考慮しない場合は、金利スワップの初期価格は 0 であるため、マッチング資産の時価と負債時価は一致するが、ビット・オファー・スプレッドを考慮する場合には、金利スワップの初期価格がコスト負担分だけ負値になるため、ファンディングレシオは 1 を若干割り込んだ状態から将来へ向けてのシミュレーションが開始される。

1 年経過後に、個々の制度加入員についての加齢と脱退や死亡による移動のシミュレーションを行い、年金給付や掛金収入、さらに債券の償還やスワップの金利授受を合算後、1 年後の期間構造シナリオに整合的な利回りで発行される 10 年の割引債へ残金を投資する処理を行う。そして、年度末における金利期間構造の下で資産と負債およびヘッジポジションの時価を再計算し、サープラスリターンを求め、最後に再び最適なヘッジ戦略にリバランスする、という一連の手続きを 5 年後まで繰り返し実行する。

ただし、5 年目の財政再計算で昇級率見直し（ベースアップ）を考慮する場合には、過去 5 年間の 10 年金利が連続的に上昇した場合に限り、各年の金利期間構造（ゼロイールド）における 10 年金利から 2% を（実質金利対応部分として）控除した残りをインフレ率と見なし、その 5 年移動平均を 5 年目の負債キャッシュフロー予測における昇級率に反映させることとした。

5 年後までのシミュレーションを 200 回繰り返し行い、各年毎に得られたサープラスリターンの分布から VaR（信頼水準 95%）を計測し、ヘッジ無しの場合の VaR を 1 として相対値で比較することとした。

4.6 シミュレーション結果

4.6.1 ヘッジ戦略毎の想定元本

表 7 のヘッジポジションを見ると、例えばデュレーションマッチングの D(30) と D(20) を見て明らかとなり、満期年限の短いスワップを使用する場合にはレバレッジが高くなることが確認できる。また、KRD では長期のスワップで固定金利を受け取りながら短期で固定を支払うポジションとなっているが、これは、現物の債券ポートフォリオのキャッシュフローが 1 年から 10 年までに集中していることから、それを打ち消すように金利スワップポジションが形成されるためと解釈できる。

4.6.2 取引コストの影響

取引コストを考慮しない場合についてヘッジ戦略毎の違いを見ると、キーレート・デュレーション・マッチングのヘッジ精度が最も高く、次にデュレーション・マッチング同士の比較では、より長期のスワップを利用した D(30) が D(20) よりも高い精度を示した。

しかし、取引コスト（ビット・オファー・スプレッド）を考慮すると、全般的にヘッジ精度が悪化し、特にキーレート・デュレーション・マッチングはリバランスに伴う取引コスト負担が大きいため、5年後にはデュレーションマッチング D(30) に逆転されてしまう結果となった。

各ヘッジ戦略で負担するビッド・オファー・スプレッドによるコストを、戦略構築時のミッドレートによる時価評価額で計測したところ、対負債時価比率で、KRD が 0.98%、D(30) が 0.74%、D(20) が 0.58%となった。リバランスせずに全スワップを満期まで保有するならば、当該コストは平均保有期間で償却するものと見なせるが、リバランスしながら発生したコストを単年度償却する場合は、平均的な資産の利回り（ゼロイールドの平均値）が 2%程度しかない状況であるため、コスト負担によるサープラスリターンへの影響は大きなものとなっている。

したがって、コスト負担をいかに回避できるかが LDI の成否を決める鍵であるとみなすこともできそうである。つまり、ヘッジ戦略のテクニカルな条件よりも、金融機関に対する値引き交渉力がヘッジ精度を決める支配的な要因となっており、交渉力が無い基金は、そもそもキーレート・デュレーション・マッチング戦略のように、頻繁なリバランスを伴う戦略を実践する要件すら満たしていないと言えるかもしれない。

4.6.3 インフレリスク

5年後のベースアップを考慮した場合の結果を見ると、いずれのヘッジ戦略においてもヘッジをしない場合よりも VaR が大きくなっている。これは、今回採用したインフレシナリオが、名目金利と完全相関するものであったために、金利が徐々に上昇するシナリオにおいては、負債とマッチング資産は連動して時価を切り下げていくが、インフレシナリオが昇級率の引き上げ条件を満たす場合には、負債時価のみが上昇し、サープラスリターンを大きく引き下げる結果となるためである。したがって、本稿で議論してきたヘッジ戦略は、名目金利と正の相関を示すインフレリスクを想定する場合、結果的にオーバーヘッジとなる可能性が高いことをこの結果は示唆している。なお、インフレシナリオの蓋然性を確認するために、シミュレーションにおけるインフレ率の分布を確認したが、約 6 割は 0 で、1%の上昇となるのは分布の約 95 パーセンタイルであり、経験的に判断すれば非現実的なシナリオではないと思われる。

5 総括

本稿では、LDI の本質はマッチング資産の構築にあるとして、負債固有のリスクや金利期間構造に関わるモデルリスクを評価し、さらに実際的な条件の下で代表的なヘッジ戦略の精度を評価した。その結果、特に負債固有のリスクは無視できない程に大きく、金利リスクだけを高い精度でヘッジしても資産・負債のマッチング精度向上には限界があることが示唆された。また、マッチング資産のヘッジ効果を決定する要因としては、超長期の金利スワップが利用できるかどうか、また金利スワップ取引に関わるコストを極小に抑えることができるか否かといった実際的な要因が、ヘッジ戦略のテクニカルな条件よりも重要である可能性を指摘した。さらに、財政再計算におけるインフレの影響

表 7: ヘッジ戦略のポジションとサープラスの VaR 推移

		KRD	D(30)	D(20)
初期のヘッジ ポジション	5Y	-58%	-	-
	10Y	-17%	-	-
	20Y	25%	-	91%
	30Y	71%	71%	-
VaR の推移 ・コスト：なし ・ベースアップ：なし	1 年後	17%	29%	46%
	2 年後	22%	33%	47%
	3 年後	25%	35%	49%
	4 年後	26%	34%	49%
	5 年後	32%	42%	58%
VaR の推移 ・コスト：あり ・ベースアップ：なし	1 年後	51%	56%	68%
	2 年後	56%	60%	67%
	3 年後	62%	64%	69%
	4 年後	66%	66%	74%
	5 年後	83%	81%	94%
・ベースアップ：あり	5 年後	117%	123%	137%

VaR はヘッジなしの VaR を 100%とした場合の相対値.

(昇給率の見直し) について検討した結果、金利リスクヘッジを精緻に行うほどインフレリスクが拡大する傾向があるため、インフレの可能性がある場合には、金利のヘッジ比率を理論値よりも引き下げの方が得策だという示唆も得られた。

また、本稿では実証的な検証は行っていないが、信用リスクの高まりを受けて超長期のスワップ契約が実質的に難しい状況があり、一般の年金基金にとって LDI は達成不可能な戦略である可能性も指摘した。

参考として、各ヘッジ戦略のフルヘッジの 70%相当の想定元本で、リバランスをせずに保有した場合のシミュレーション結果を表 8 に示す。取引想定元本が減少したことによる精度の低下を、初期の取引コストが減少した効果が上回り、フルヘッジの場合よりも全般的にヘッジ精度が高くなっている。また、5 年後の財政再計算におけるオーバーヘッジの傾向も大幅に改善している。さらに、デュレーションマッチング D(30) が複雑なキーレート・デュレーション・マッチング KRD と同等かそれ以上のパフォーマンスを示していることも重要である。このように、適当なヘッジによってもヘッジしない場合の半分程度にサープラスリスクを低減することは可能であり、これを LDI と呼ぶかどうかは別として、金利スワップを活用した資産デュレーションの長期化自体にはそれなりの意味があるだろう。

表 8: ヘッジ戦略のポジションとサープラスの VaR 推移 (リバランスなし)

		KRD	D(30)	D(20)
VaR の推移 ・ヘッジ比率：70% ・コスト：あり ・ベースアップ：あり	1 年後	58%	47%	50%
	2 年後	56%	47%	51%
	3 年後	55%	46%	53%
	4 年後	51%	46%	52%
	5 年後	69%	70%	80%

VaR はヘッジなしの VaR を 100%とした場合の相対値.

最後に、本稿の解釈に関する注意として、LDI に対する評価は年金基金の状況や選好に応じて変わることもある点について、いくつか例を挙げて説明したい。

本稿で採用した企業年金モデルは、単純な人員構成を仮定したために平均的な年金基金と比べる

と、成熟度が低くキャッシュフローのデュレーションが長い傾向が強いようである。そのため、マッチング資産構築におけるヘッジ誤差が実態よりも過大評価されている可能性もある¹²。さらに、ヘッジ戦略のリバランス方法については、全てを解約・再設定という方法をとったため、取引コストが実際よりも大きくなっている可能性が高い。ただし、取引コストが無い場合の結果も併せて示したので、実際はこれらの中間的な結果に収まると思われるので必要に応じて参照してほしい。

また、本稿ではサープラス・リターンの VaR（信頼水準 95%）で全ての結果を比較しているが、標準偏差をリスク指標とした場合には、全般的にヘッジ精度が向上して見えると同時に、キーレート・デュレーション・マッチング KRD の精度が相対的に高く評価される（表 9 を参照）。その理由は、取引コストはサープラスリターン分布をマイナス方向に平行移動させる効果として観測されるため、直接的に VaR を増加させる要因として働く一方で、分布の中心からの距離で計算される標準偏差に対しては中立的で殆ど影響を与えないからである。したがって、もし追加的なコスト（掛金増）を負担してもよいかからサープラスリターンの標準偏差を小さくしたいと考える基金があれば、LDI は効果的な戦略であると思われる。

表 9: ヘッジ戦略とサープラスリターンの平均と標準偏差

(a) コストなし，5年後のベースアップなしの場合

		No Hedge	KRD	D(30)	D(20)
平均	1年後	-0.31%	-0.53%	-0.58%	-0.63%
	2年後	-0.37%	-0.96%	-1.03%	-1.10%
	3年後	-0.24%	-1.31%	-1.39%	-1.48%
	4年後	0.21%	-1.56%	-1.61%	-1.69%
	5年後	0.40%	-1.77%	-1.82%	-1.91%
標準偏差	1年後	3.39%	0.26%	0.74%	1.28%
	2年後	4.62%	0.44%	1.03%	1.76%
	3年後	5.74%	0.65%	1.28%	2.08%
	4年後	6.87%	0.87%	1.60%	2.61%
	5年後	7.21%	1.09%	1.83%	2.95%

(b) コストあり，5年後のベースアップありの場合

		No Hedge	KRD	D(30)	D(20)
平均	1年後	-0.30%	-2.44%	-2.01%	-1.58%
	2年後	-0.35%	-3.77%	-3.13%	-2.76%
	3年後	-0.24%	-5.02%	-4.17%	-3.68%
	4年後	0.19%	-6.15%	-5.06%	-4.42%
	5年後	-1.36%	-8.76%	-7.46%	-6.68%
標準偏差	1年後	3.38%	0.27%	0.74%	1.29%
	2年後	4.62%	0.45%	1.03%	1.76%
	3年後	5.72%	0.64%	1.28%	2.10%
	4年後	6.82%	0.84%	1.60%	2.64%
	5年後	5.89%	1.98%	3.09%	4.30%

¹²閉鎖型年金など負債固有のリスクが小さいと考えられる年金制度の場合にはマッチング資産構築はそれほど難しくないと
いう指摘もある。

<補論>

A マatching戦略構築のためのヘッジ戦略

A.1 ヘッジ戦略のトレードオフ

ヘッジ戦略の中で最も単純なものがデュレーション・マッチングで、期間構造の平行シフトのみに選択的なヘッジが可能であるが、より多様な変動に対しては乖離リスクが生じる。その対局にあるのがキャッシュフロー・マッチングであり、これは負債キャッシュフローを完全に複製する方法であるため、確定的キャッシュフローの完全なヘッジと言える。しかし、実際の負債キャッシュフローは、財政再計算における基礎率見直しに伴う不確実異性があるため、キャッシュフロー・マッチングよりも柔軟なデュレーション・マッチングやキーレート・デュレーション・マッチングなどが現実的なヘッジ戦略となるだろう。表 10 には各種ヘッジ戦略を示したが、本稿ではキーレート・デュレーション・マッチングより単純な戦略を考察の対象とした。

表 10: マatching資産構築のためのヘッジ戦略

No.	Matching戦略	乖離リスクの大きさ	戦略見直しリスク
1	デュレーション	大	小
2	デュレーション&コンベキシティ	↑	↓
3	キーレート・デュレーション	↑	↓
4	キーレート・デュレーション&コンベキシティ	↑	↓
5	キャッシュフローマッチング	小	大

「乖離リスク」とは期間構造変動の複雑性に起因するヘッジできない金利リスク

「戦略見直しリスク」とは負債固有リスク起因するヘッジ戦略見直しの柔軟性に関わるリスク

A.2 マatching戦略の詳細

A.2.1 デュレーション・Matching戦略

デュレーション・Matching戦略における金利スワップの想定元本は以下の通り決定する。

$$N_S = \frac{V_L D_L - V_A D_A}{D_S}, \quad (1)$$

N_S : 金利スワップの想定元本

V_A : 資産時価総額

V_L : 負債時価総額 (PBO)

D_L : 負債デュレーション (目標デュレーション)

D_A : 資産デュレーション

D_S : 金利スワップのデュレーション

A.2.2 デュレーション・コンベクシティ・マッチング戦略

資産と負債のデュレーションとコンベクシティを一致させるためには満期が異なる2つ以上の金利スワップが必要となるが、ここでは、2つの金利スワップによるマッチング戦略について求めた想定元本の式を示す。

2つのスワップのデュレーションをそれぞれ D_{S1} , D_{S2} , コンベクシティを C_{S1} , C_{S2} とする。資産と負債のデュレーションとコンベクシティを、 D_A , D_L および C_A , C_L とする。さらに、資産時価と負債時価を V_A , V_L , 2つのスワップの想定元本をそれぞれ N_{S1} , N_{S2} とする。初期時点におけるファンディングレシオを $FR = V_A/V_L$ とするとき、2つの金利スワップの想定元本は次の通り定まる。

$$N_{S1} = \frac{V_A D_{S2} (C_A - C_L / FR) + V_A C_{S2} (D_L / FR - D_P)}{D_{S1} C_{S2} - C_{S1} D_{S2}} \quad (2)$$

$$N_{S2} = \frac{V_A D_{S1} (C_A - C_L / FR) + V_A C_{S1} (D_L / FR - D_P)}{D_{S2} C_{S1} - C_{S2} D_{S1}} \quad (3)$$

A.2.3 キーレート・デュレーション・マッチング戦略

ここでは Scherer[2007] を参考にしてキーレート・デュレーション・マッチングの方法を説明する。負債のキャッシュフローを $\{l_{t_i}, i = 1, 2, \dots, n\}$, 割引金利を $\{s_{t_i}, i = 1, 2, \dots, n\}$ とすれば、負債時価は

$$L = \sum_{i=1}^n \frac{l_{t_i}}{(1 + s_{t_i})^{t_i}}$$

と計算できる。簡単のため、 $t_i = i$ とし、各 s_i をキーレートと見なした場合について、負債のテイラー展開を考えると、

$$\frac{\Delta L}{L} \approx \sum_{i=1}^n KRD_i^L \Delta s_i, \quad KRD_i^L = \frac{dL/ds_i}{L}$$

と表すことができる。ここで、 KRD_i^L は、負債のキーレート s_i に関するキーレートデュレーションである。同様に、資産についても将来キャッシュフローが合理的に予測できる場合には、キーレートデュレーションを定義できる。

実際には、キーレートを少数の代表的な金利に集約する必要があるが、例えば、以下のような適当な加重関数 ds_i/ds_k を仮定すれば、

$$\frac{ds_i}{ds_k} = \frac{|t_i - t'_k|}{|t_k - t'_k|}$$

キーレート・デュレーションを以下の通り集約することができる。

$$KRD_k^L = \sum_{i=1}^n \frac{l_i}{L} \left(\frac{dl_i}{ds_i} \frac{1}{l_i} \frac{ds_i}{ds_k} \right), \quad k = 1, \dots, m (< n)$$

m 個のキーレートに関する負債 L のキーレートデュレーションを

$$KRD^L = (KRD_1^L KRD_2^L \dots KRD_m^L)$$

同様に、資産とキーレートに対応した m 個の金利スワップのキーレートデュレーションを KRD^A , KRD^{S_1} , KRD^{S_2} , \dots , KRD^{S_m} , 資産時価を A , スワップの想定元本を N (m 次元ベクトル) とするとき、

$$KRD^L L = KRD^A A + (KRD^{S_1} KRD^{S_2} \dots KRD^{S_m}) N$$

を満たすようにスワップの想定元本を決めれば良いので,

$$N = (KRD^{S_1} KRD^{S_1} \dots KRD^{S_m})^{-1} (KRD^L L - KRD^A A) \quad (4)$$

となる.

参考文献

- [1] 白杵政治 [2007] 「LDI は確定給付年金を救えるか」, 証券アナリストジャーナル 2007.5
- [2] 北村智紀 [2004] 「年金 ALM とリスクバジェットティング」, 朝倉書店
- [3] 桜井悠司 [2011] 「OTC デリバティブ取引におけるカウンターパーティリスクの管理手法 : CVA の理論と実務上の論点に関するサーベイ」, Discussion Paper No.2011-J-1, 日本銀行
- [4] 末吉英範 [2005] 「年金負債を意識した投資戦略の進展」, 証券アナリストジャーナル, 2005.12
- [5] Adams, J. and D. J. Smith [2009], “Mind the Gap: Using Derivatives Overlays to Hedge Pension Duration,” *Financial Analysts Journal*, Jul/Aug 2009, pp60–67.
- [6] Brezinski, C., and L. Wuytack [1991], “Extrapolation Methods Theory and Practice,” *North Holland*.
- [7] Chiallora, C. and O. K. Kow [2003], “Finite Dimensional Affine Relisations of HJM Models in Terms of Forward Rates and Yields,” *Review of Derivatives Research*, **6**, pp129–155.
- [8] Heath, D., R. Jarrow and A. Morton [1992], “Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A new Methodology for Contingent Claims Valuation,” *Econometrica*, **60**, 77-105.
- [9] Hibbert, J., P. Mowbray and C. Turnbull [2001], “A Stochastic Asset Model and Calibration for Long-Term Financial Planning Purposes,” *Barrie & Hibbert Limited*
- [10] Ibbotson, R. G. and R. A. Sinquefeld [1976], “Stocks, Bonds, Bills, and Inflation: Simulations of the Future (1976-2000),” *Journal of Business*, **49**(3), pp313-378.
- [11] Inui, K. and M. Kijima [1998], “Markovian Framework in Multi Factor Heath Jarrow Morton Models,” *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **33**(3), pp423-440.
- [12] Leibowitz, M. L. [1992], “Investing,” *Probus Publishing*.
- [13] Nelson, C. R. and A. F. Siegel [1987], “Parsimonious Modeling of Yield Curves,” *The Journal of Business*, **60**(4), pp473–489.
- [14] Scherer, B. [2007], “Portfolio Construction and Risk Budgeting (3rd Edition),” *Risk Books*.
- [15] Svensson, L. [1994], “Estimating and Interpreting Forward Interest Rates: Sweden 1992-1994,” *International Monetary Fund*, Technical Report No.114.

Re-evaluation of LDI strategy considering liability inherent risk and term structure risk

Koji Inui

Graduate School of Global Business, Meiji University

B718 14th-Bldg. 1-1 Kandasurugadai Chiyoda-ku, Tokyo 101-8301, Japan.

Abstract

In this paper, we regard the substance of LDI as constructing asset portfolio fluctuates with the liability, and verify the important issues of the hedging strategy to take place.

First, we assess the liability inherent risk of hypothetical pension plan, and evaluate the model risk of its hedging strategies associated with the assumptions of interest rate term structure model, and it was suggested that they are nonnegligibly significant compared to interest rate mismatch risk.

In addition, we evaluate the accuracy of some typical hedging strategies under realistic conditions. We find that the impact of transaction costs is large enough to make us hesitate to adopt rather complex strategies considering the rebalance flexibility or the significance of liability inherent risk.

The maturity length of swap is also dominant factor of the hedging performance, the longer, the better. Consequently, we point out there seems no significant effectiveness of the complex hedging strategies chosen under the name of LDI compared to a simple prolonged duration strategy.