– 特別寄稿 –

リスク尺度 — 理論と統計手法

塚原 英敦

成城大学 経済学部

〒157-8511 東京都世田谷区成城 6–1–20

e-mail: tsukahar@seijo.ac.jp

概 要

本解説論文では，近年保険数学の分野でも非常に話題になっているリスク尺度 (risk measure) について，その動機付けを明らかにした上で，まず整合性や凸性その他の公理の定義と意味，整合的リスク尺度の一般形を与える表現定理などの理論を概観する．さらに，バリュー・アット・リスクや期待ショートフォールなどの例について詳しく述べた後，リスク尺度推定のための統計的手法について論じる．さらに，歪みリスク尺度の 1 パラメータ族とワン（Wang）変換との関連についても紹介する．最後に，リスク尺度に関するさらなる話題について，簡潔にその概略と文献案内を与える．

キーワード：整合的リスク尺度，歪み変換，保険料計算原理，バリュー・アット・リスク，期待ショートフォール

1 はじめに

リスクは金融・保険分野で中心的・本質的な要素である．このリスクという単語を Oxford English Dictionary で調べると，“The possibility of something bad happening at some time in the future” となる．ここで注目すべきなのは，“将来のある時点で” という不確実性が含意されていること，そして “悪いことが起こる可能性” であるから，悪影響を及ぼすということを示していることである．より金融・保険分野における意味に近いものとしては，“Exposure to the chance of injury or loss”（Webster's College Dictionary）が適切であろう．保険会社や金融機関は，保険を引き受け，様々な金融商品を売買することによって，将来損失が起こる可能性にさらされている．この意味で，保険会社や金融機関はリスクに直面しているわけである．

保険分野では，少し前までは人や物の保険を引き受けるリスクが主たる考察対象であった．伝統的には，この保険引受リスクは非常に多くの被保険者を集め，リスクをプールすることで，大数の法則を適用することにより確定的に評価されてきた．それが保険制度を原理的に支えていることに変わりはない．しかし，代替的リスク移転（ART）の発展やデリバティブ，様々な証券化の技術にみられるように，保険会社が対象とするリスクは伝統的な保険リスクから金融リスクにまで広がるとともに，従来はもっぱら保険の対象とされていたリスクも金融市場における分散が可能となってきた．特に，変額年金保険のような新しい新商品の登場により，最近では管理の対象となるリスクが急激に多様化している（秋山・国友 [2006]，松山 [2005]）．

そのような金融リスクとしては，ポジションの市場価値の変動に起因する市場リスク，取引相手の信用の変化に伴う信用リスク，不適切な内部手続き，人的失策，システムの不具合，外部事象に起因する業務リスク（operational risk）が代表的なものである．バーゼル II に基づく規制では，これら 3 つの

リスクは各金融機関が明示的に計測・管理しなければならないものである．一方，市場性の欠如による流動性リスク，リスク計測モデルの誤特定化に付随するモデルリスクも近年問題とされているが，これらは上記の 3 つとは別の扱いが必要であると思われる．

金融機関・保険会社にとって，これらのリスクを統合的に計測・管理する必要性はほぼ自明なことであろう．そしてさらに言えば，時代が求めているのは，統計学・金融工学の理論的道具を用いてリスクをやり繰りする**定量的**リスク管理なのである．この実務上の背景には，銀行業に関してはバーゼル II，保険分野では EU で提案されているソルベンシー II やスイス・ソルベンシー・テストという規制当局の要請がある．これらの規制を真に理解する上でも，定量的リスク管理についての知識は不可欠である．そして，多種多様なリスクを**総計的**に測るというリスク尺度の概念は，定量的リスク管理の中で基本的なものである．近年は保険と金融の融合ということが理論的に，そして制度的に盛んに叫ばれているが（Embrechts [2000]，Smith [1986]，森平 [2004]，森本 [2000] 等を参照），リスク尺度は正にその理論的表れの 1 つであると言えるであろう．

本節の残りの部分では，リスク計測のアプローチについてその基本部分を解説する．**リスク計測**とは，過去の観測値に基づき，具体的なモデルを前提として，ポジションの将来価値の分布，あるいはその汎関数に対する統計的推定値を計算することと定義される（McNeil, Frey and Embrechts [2005]，第 1 章）．数学的には，リスクの源は時点 t における損失を表す確率変数 X_t であり，さらに X_t はいくつかのリスク因子 $\boldsymbol{Z}_t = (Z_{t,1}, \ldots, Z_{t,d})'$ の関数として書ける：$X_t = f(\boldsymbol{Z}_t)$．例えば，株式ポートフォリオであれば各株価がリスク因子であり，債券ポートフォリオでは利回りがリスク因子である．オプションについては，ブラック-ショールズ型の評価式を仮定すれば，原資産の価格，金利，ボラティリティがリスク因子となるであろう．いずれにしても，測りたいのは総計リスク（ポジション全体のリスク）であるということ，そして，他のいくつかの文献とは異なり，ポジションの純将来価値ではなく，損失を考察の対象としていることにも注意されたい（これは冒頭に述べたリスクの解釈による）．

リスク計測の具体的方法として，ポートフォリオに含まれる各証券の想定元本額の和を考える単純なやり方は非常に直観的でわかりやすいが，ロングとショートを区別しないこと，ネッティングや分散化が考慮されないこと，そして派生証券については甚だ疑問が残ること等の理由から，金融商品が高度に複雑化した現在では用いられなくなっている．

リスク因子の変化に伴うポートフォリオ価値の変動を測る因子感応度もこれまでリスクを測る量として考えられてきた．その代表的な例としては，オプションにおけるデルタやベガなどのグリークスや債券に対するデュレーションが挙げられる．これらは，他の尺度と併用してポジション制限を設定するには有用である．しかし，異なるリスク因子に関して，そして様々な市場に渡って総計不能なため，金融機関全体としてのリスク量が計算できないことから，リスクを総計するという目的のためには不十分である．

リスク因子について多くのシナリオを想定し，各シナリオに重みを付けてポートフォリオの損失を計算し，その最大値をリスク量と定義するという，シナリオに基づくリスク尺度という概念もある．ただし，シナリオと重みをどう定めるかについては恣意性が残るし，そして異なるリスク因子に影響を受けるポートフォリオの比較は困難となるという欠点もある．

本稿では，主として損失分布に基づくリスク尺度を考える．例えば，分散（標準偏差）がその伝統的な例であり，後述する VaR や期待ショートフォールがより現代的な例と言える．このタイプのリスク尺度を考える根拠は，損失分布を見ればリスクをほぼ正確に把握できるということであるが，保険数理学との融和性が高いという利点も兼ね備えている．さらに，(i) あらゆるポートフォリオに対して意味を持つ，(ii) ネッティング・分散化を反映する，(iii) ポートフォリオ間で比較可能である，といった多くのメリットがある．もちろん損失分布の推定には困難が伴う場合が多いが，それはこれからの統計学的研究により解決されるべき問題を提示していると考えるべきであろう．

金融リスク管理全般について，実務的な側面は Crouhy, Mark and Galai [2001] に詳しく，Hull [2007] もよくまとまった教科書である．保険との関連では，Harrington and Niehaus [2003] がよく読まれているようである．リスク管理における統計的方法について詳しくかつ包括的な解説がある McNeil, Frey and Embrechts [2005] は，本稿にお

ける定量的リスク管理の解説においてもかなり参考にした．

本稿の構成は以下の通りである．まず，次節では整合的リスク尺度の理論を解説する．その中には，整合性や凸性その他の公理の定義と意味，整合的(あるいは凸) リスク尺度の一般形を与える表現定理，バリュー・アット・リスクや期待ショートフォールなどの例，確率順序との関連などが含まれ，本稿の中心部分である．第3節では，リスク尺度の値を数値的に得るための統計的手法について，その方法論と (漸近) 分布論を述べる．筆者が最近提唱している歪みリスク尺度のパラメータ族について第4節に簡単にまとめたが，これは保険数理でよく知られているワン (Wang) 変換と深く関連している．最終節では，本稿で述べ切れなかったいくつかの問題について，その概略と参考文献を与えている．

2 整合的リスク尺度

Artzner et al. [1999] による公理論的アプローチでは，リスク尺度について，それが満たすべき性質は何か，そしてそのようなリスク尺度はどのように表現されるのかという問題を考える．そのためには，リスク尺度という概念に一定の定義を与えることが必要である．彼らによれば，それは**損失 X をもたらすポジションが，外部あるいは内部のリスク管理者にとって許容可能となるために，そのポジションに上乗せされるべき資本量**というものである．これはある意味，保険における責任準備金という考え方に近いものであると言える（c.f. Artzner [1999]）．

リスクの源は損失を表す確率変数であるから，そのための数学的設定と記号が必要である．まず $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ を確率空間とし，$L^\infty = L^\infty(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ を $\mathbf{P}$ 本質的有界な確率変数全体とする．この空間の元 $X \in L^\infty$ は損失を表し，その $\mathbf{P}$ の下での分布関数を $F_X(x) := \mathbf{P}(X \leq x)$ とおく．さらに，F_X の分位関数（quantile）を $F_X^{-1}(u) := \inf\{x \in \mathbb{R}\colon F_X(x) \geq u\}$ と書き表す．この X は，前節における損失変数 X_t を固定された t について考えたものであり，したがって時間的設定としては単一期間ということになる．また本節では，背後にあるリスク因子を考慮に入れずに，結果として現れる損失 X のみを考察対象とする．

次の定義で述べる整合的リスク尺度（coherent risk measure）という概念は，後の研究に非常に影響を与えた論文 Artzner et al. [1999] によって提案されたものであるが，よりくだかれた解説は Artzner et al. [1997] にも与えられている．

定義 2.1. **整合的リスク尺度**とは，L^∞ に属する確率変数に対して実数を割り当てる関数 $\rho\colon L^\infty \to \mathbb{R}$ で，次の4つの性質を満たすものである：

正値性： $X \leq 0$ a.s. ならば，$\rho(X) \leq 0$.

平行移動共変性： すべての $c \in \mathbb{R}$ に対して，

$$\rho(X + c) = \rho(X) + c$$

正の同次性： すべての $\lambda > 0$ に対して，

$$\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$$

劣加法性： 任意の $X, Y \in L^\infty$ に対して，

$$\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$$

注意 2.2. 正値性と劣加法性より

単調性： $X \leq Y$ a.s. ならば，$\rho(X) \leq \rho(Y)$

が成り立つ．また，正の同次性から直ちに $\rho(0) = 0$ が導かれる．

これら4つの公理については，詳しく解釈しておく必要があろう．まず正値性については非常に簡明であり，損失が出ないことが確実ならば，そのポジションのリスクはなく，備えとしてとっておく資本はいらないということである．次の平行移動不変性は数学的にも本質的な要請であり，確実に c の損失が出るポジションを現在評価対象となっているポジションに上乗せした場合，その c 分だけ余計に資本を積み増さなければならないということである．そして，このことはリスク尺度の値が，評価対象となっているポジションと同じ貨幣単位で表示されるということを意味する．時に，ここで我々が整合的リスク尺度と呼んでいるものが貨幣的（monetary）リスク尺度と言われたりする所以である（例えば，Föllmer and Schied [2002c]，第4章）．

正の同次性はこれまで盛んに議論されてきた要請である．主たる批判は，主に流動性の観点からリスクはポジションの大きさに比例して大きくなるわけではなく，正の同次性は λ が1に近い値でない場合には成り立たないという指摘である．これに対し

て，リスク尺度はリスク量というものを算出するやり方を定義するものであり，貨幣単位の変換に関して共変であるべきという主張から正の同次性を支持する議論も存在する．

劣加法性は，2 つのポジションを合わせたときに，そのリスクは個々のポジションのリスクの和よりも小さいという要請である．これは経済学で古くから支持されている "分散化の効果" を表したものと解釈できる．これらの "公理" について，より突っ込んだ解説は原論文 Artzner et al. [1999] に与えられているので，より深く理解したいと思われる読者は是非一読されたい．

正の同次性に対する上述の批判から，次の概念が Föllmer and Schied [2002a], [2002b] と Frittelli and Rosazza Gianin [2002] によって提案された．

定義 2.3. **凸リスク尺度**（convex risk measure）とは，平行移動共変性と単調性に加えて，

凸性： $0 \leq \lambda \leq 1$ に対して，

$$\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y)$$

を満たす $\rho \colon L^\infty \to \mathbb{R}$ のことをいう．

明らかに整合的リスク尺度は凸リスク尺度であるから，数学的には凸リスク尺度のほうがより一般的な概念である．凸リスク尺度については $\rho(0) = 0$ が成り立つとは限らないので，別途**正規化**の条件として $\rho(0) = 0$ を要請することが多い．そして，この正規化を仮定すれば，

$$\rho(\lambda X) \leq \lambda\rho(X), \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$
$$\rho(\lambda X) \geq \lambda\rho(X), \quad \lambda \geq 1$$

が成り立つことになる．

凸性は整合的リスク尺度の場合の劣加法性と同様に，分散化によりリスクは増加しないという原理を具体化したものとして正当化される．

さらに，平行移動共変性と単調性から，ρ が凸リスク尺度であれば，

$$|\rho(X) - \rho(Y)| \leq \|X - Y\|_\infty$$

というリプシッツ連続性が成り立つ．ここで，$\|\cdot\|_\infty$ は L^∞ ノルムである．これはいくつかの数学的事実を示す際に有用な性質であり，次のように簡単に示せる．明らかに $X \leq Y + \|X-Y\|_\infty$ だから，単調性と平行移動共変性より，$\rho(X) - \rho(Y) \leq \|X - Y\|_\infty$ が成り立つ．あとは X と Y を入れ替えて同じ議論をすればよい．

注意 2.4. Artzner et al. [1999] では，リスク尺度自体よりもリスクの許容集合 (acceptance set) に重きが置かれている．リスク尺度 ρ に付随する許容集合は $\mathscr{A}_\rho = \{X \in L^\infty \colon \rho(X) \leq 0\}$ と定義され，追加的な資本注入は不必要という意味で許容可能なポジション全体を表す．逆に，空でない $\mathscr{A} \subset L^\infty$ が

- $\sup\{c \in \mathbb{R} \colon c \in \mathscr{A}\} < \infty$.
- $X \in \mathscr{A}, Y \in L^\infty, Y \leq X$ ならば，$Y \in \mathscr{A}$.

の 2 条件を満たすとき，$\rho_{\mathscr{A}}(X) := \sup\{c \in \mathbb{R} \colon c + X \in \mathscr{A}\}$ は，$\mathscr{A}$ が凸集合ならば凸リスク尺度，$\mathscr{A}$ が錐ならば整合的リスク尺度になる．

よって，数学的には整合的（あるいは凸）リスク尺度を定めることと，上記のような条件を満たす許容集合を定めることは同値である．この論文では，応用上必要になるのはやはりリスク尺度の値であるという見方から，この許容集合に関する議論や結果は述べないので，興味のある読者は Artzner et al. [1999]，あるいは Föllmer and Schied [2002c] の第 4 章などを参照していただきたい．

2.1 表現定理

この節では，整合的リスク尺度の一般形を与える定理を述べる．Artzner et al. [1999] では，有限確率空間の場合にこのような表現定理が示されたが，Delbaen [2000], [2002] では，一般の確率空間に対しての結果が得られている．その際に，より使い易い形の結果を得るために，次のような技術的な連続性が要請される．

ファトゥ性： X_n が一様有界で，$X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$ のとき，

$$\rho(X) \leq \liminf_{n\to\infty} \rho(X_n)$$

これは次に述べる下からの単調収束性と同値である．

下からの単調収束性： X_n が一様有界，かつ $\mathbf{P}$-a.s. で $X_n \uparrow X$ のとき，$\rho(X_n) \uparrow \rho(X)$

このファトゥ性を仮定した形で Delbaen の定理を述べると次のようになる：

定理 2.5 (Delbaen). ファトゥ性をもつ整合的リスク尺度 ρ は

$$\rho(X) = \sup\left\{\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(X) \colon \mathbf{Q} \in \mathscr{Q}\right\}$$

の形に表現される．ここで，$\mathscr{Q}$ は $\mathbf{P}$ に関して絶対連続な確率測度の集合である．

これは実は，頑健統計学 (robust statistics) の分野で，頑健な検定を考察する際に導かれた結果と同等である（Huber [1981] 参照）．

さらに，凸リスク尺度についても同様な表現定理が成り立つ．

定理 2.6 (Föllmer and Schied，Frittelli and Rosazza Gianin). ファトゥ性をもつ凸リスク尺度 ρ は

$$\rho(X) = \sup\left\{\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(X) - \alpha(\mathbf{Q}) \colon \mathbf{Q} \in \mathscr{Q}\right\}$$

の形に表現される．ここで，$\mathscr{Q}$ は $\mathbf{P}$ に関して絶対連続な確率測度の集合であり，$\alpha(\mathbf{Q})$ は罰則関数 (penalty function) である．

以上の表現定理の証明については，Föllmer and Schied [2002c] の第 4 章によくまとまった記述があるので，興味のある読者は参照されたい．

次に，整合性の 4 つの公理にさらにいくつかの条件を加えて，より実用性をもつリスク尺度の形を求めることを考えよう．まず，

法則不変性： X と Y が同一の分布に従うならば，

$$\rho(X) = \rho(Y)$$

を導入する．これは $\rho(X)$ の値が X の $\mathbf{P}$ の下での分布のみに依存するという条件であり，リスク尺度の値 $\rho(X)$ が統計的に推定可能であるために不可欠である．もしこの性質が成り立たなければ，F からの iid 標本 $X_1, \ldots, X_n$ が得られるという統計的にはほぼ理想な状況の下でさえ，$\rho(X)$ の値を推定できないということになってしまい，リスク尺度の実用的価値を全く損なうことになりかねないからである．

法則不変性に関して数学的に興味深い事実が Jouini Schachermayer and Touzi [2005] によって示されている．

定理 2.7 (Jouini, Schachermayer and Touzi). 基礎となる確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ がアトムをもたないと仮定する．このとき，法則不変な凸リスク尺度は必ずファトゥ性をもつ．

ここで，$A \in \Omega$ が，(i) $\mathbf{P}(A) > 0$；(ii) すべての $B \subset A$，$B \in \mathscr{F}$ に対して，$\mathbf{P}(B) = 0$ か $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A)$ のどちらかが成立する，という 2 つの条件を満たすとき，A は $\mathbf{P}$ の**アトム**であるといい，$\mathbf{P}$ がアトムをもたないとき，確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ はアトムをもたない (atomless) という．定理 2.7 では，技術的な理由からこの仮定が不可欠である．

上記の論文では，凸解析での結果を用いた証明が述べられているが，Tsukahara [2006] には測度論のみを用いた簡潔な証明が与えられている．また，法則不変な凸リスク尺度については，Frittelli and Rosazza Gianin [2005] も参照されたい．

さらに，次の共単調加法性を説明するために，次の定義を思い起こしておく．

定義 2.8. d 個の確率変数 $X_1, \ldots, X_d$ の同時分布関数を $F(x_1, \ldots, x_d)$，周辺分布関数をそれぞれ $F_{X_1}(x_1), \ldots F_{X_d}(x_d)$ とする．このとき，$X_1, \ldots, X_d$ が**共単調** (comonotone) であるとは，次の同値な条件のうちの 1 つが成り立つことをいう．

(i) $\mathbf{P} \otimes \mathbf{P}$ に関してほとんどすべての (ω, ω') に対し，$i \neq j$ ならば，

$$\big(X_i(\omega) - X_i(\omega')\big)\big(X_j(\omega) - X_j(\omega')\big) \geq 0.$$

(ii) $F(x_1, \ldots, x_d) = F_{X_1}(x_1) \wedge \cdots \wedge F_{X_d}(x_d)$

(iii) $U \sim U(0,1)$ に対して，

$$(X_1, \ldots, X_d) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (F_{X_1}^{-1}(U), \ldots, F_{X_d}^{-1}(U))$$

(iv) 確率変数 Z と増加関数 $f_1, \ldots, f_d$ が存在して，

$$(X_1, \ldots, X_d) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (f_1(Z), \ldots, f_d(Z))$$

ここで，確率ベクトル $\boldsymbol{X}$ と $\boldsymbol{Y}$ に対して $\boldsymbol{X} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \boldsymbol{Y}$ とは，それらの同時分布が等しいことを意味する．

共単調性の理論的分析と保険数理への応用に関しては，Wang and Dhaene [1998] や Dhaene et al. [2002a], [2002b] を参照せよ．特に重要な理論的結果は，共単調な確率変数に対しては，それら

の分位関数が加法的となることである．すなわち，$X_1,\ldots,X_d$ が共単調であれば，

$$F^{-1}_{X_1+\cdots+X_d}(u)=F^{-1}_{X_1}(u)+\cdots+F^{-1}_{X_d}(u)$$

が成り立つ．

共単調性というのは非常に強い従属性の概念である．すなわち，確率変数は d 個あるが，その背後に単一のランダムネスの源があって，すべてその単調増加関数となるということである．多少直観的に言うと，$X_1,\ldots,X_d$ が共単調ということは（確率1で）すべて同じ方向に動くということであり，確率変数をリスクと同一視してファイナンスの言葉を用いて述べれば，$X_1,\ldots,X_d$ が互いにヘッジとはなり得ないということを意味する．

したがって，X と Y が共単調ならば，ポートフォリオ分散化の恩恵はないわけであるから，次の要請は非常に自然である．

共単調加法性： X と Y が共単調ならば，

$$\rho(X+Y)=\rho(X)+\rho(Y)$$

目標としている表現定理を述べるには，もう1つ定義が必要である．

定義 2.9. 歪み関数 (distortion function) とは，$[0,1]$ 上の分布関数 D のことである．すなわち，D は右連続かつ単調増加，そして $D(0)=0$ と $D(1)=1$ を満たす関数である．

このとき，任意の分布関数 F に対して，$D\circ F$ を**歪み分布関数**，

$$\int_{\mathbb{R}} x\,dD\circ F(x)=\int_{[0,1]} F^{-1}(u)\,dD(u)$$

を**歪み期待値**と呼ぶ．

歪み関数はその呼び名はともかく，様々な分野でいろいろな目的のために用いられている．例えば，Choquet [1955], Denneberg [1994], Grabisch, Murofushi and Sugeno [2000], Lehmann [1953], Puppe [1994] などがその例である．

これで次の定理（Kusuoka [2001] による）を述べる準備が整った．

定理 2.10 (楠岡). 基礎となる確率空間 $(\Omega,\mathscr{F},\mathbf{P})$ がアトムをもたないと仮定する．このとき，整合的リスク尺度 ρ が法則不変性と共単調加法性をもつならば，ある凸歪み関数 D に関する歪み期待値として書ける：

$$\rho(X)=\int_{[0,1]} F_X^{-1}(u)\,dD(u)=\int_{\mathbb{R}} x\,dD\circ F_X(x).$$

逆に，上のように凸歪み関数 D を用いて表される ρ は，法則不変かつ共単調加法的な整合的リスク尺度である．

この形のリスク尺度を**歪みリスク尺度**（distortion risk measure）と呼び，ρ_D と書くことにする．F_X^{-1} の1の近傍での振舞いが，X の分布の右裾，すなわち極端に大きな損失を示す部分に対応することに注意すれば，D は意思決定者の保守性を表現していると解釈できる．つまり，D として1の近傍に大きな重みをおくものを選べば，生じる可能性は小さいが巨額である損失を大きく意識したリスク評価となるからである．このクラスは，Acerbi の**スペクトルリスク尺度**と本質的に同じである (Acerbi [2002], [2004] 参照)．Cherny [2006] ではこのクラスに属するリスク尺度を加重 VaR (Weighted V@R) と呼んでおり，期待ショートフォールに対する優越性を示すいくつかの結果を得ている．

保険料計算原理に関しても，同種の結果が Wang, Young and Panjer [1997] により得られている．また，この歪みリスク尺度は Denneberg と Wang の保険料計算原理とも深い関係があるが (Denneberg[1990]，Wang [1995], [1996], [2000])，後者については第4節でも再び触れる．経済学における不確実性下での双対選択理論でも，Yaari [1987] や Schmeidler [1989] は効用関数の表現定理として同様の結果を証明している．

2.2 VaR

バリュー・アット・リスク（Value-at-Risk，以下では VaR と略）は，1993 年に JP モルガンの RiskMetrics により発案され（Weatherstone の 4.15 レポート），その解釈の容易さから爆発的に他の金融機関にも浸透した．Duffie and Pan [1997] には，リスク因子の特定化，VaR の推定方法，シナリオ分析について，市場リスクに的を絞った解説がある．VaR の方法論全般について優れた解説書としては，Dowd [1998]，Jorion [2001]，Pearson [2002] 等が挙げられる．

VaR の数学的な定義は非常に簡単であり，単に

損失分布の $(1-\alpha)$ 分位数として定義される：

$$\mathrm{VaR}_\alpha(X) = F_X^{-1}(1-\alpha)$$

すなわち，VaR を超える損失は前もって指定された小さい α 以下の確率でしか起こらないということになる．

上の表現からすぐわかるように，VaR は平行移動共変性，正同次性，単調性をもつ．しかし，次の例（McNeil, Frey and Embrechts [2005] の例 6.7）が示すように，劣加法性は VaR について一般には成り立たない．よって，VaR は整合的リスク尺度ではない．

例 2.11 (VaR の非整合性). $d=100$ 個のデフォルトの恐れがある社債からなるポートフォリオを考える．異なる債券のデフォルトは独立であるとし，デフォルト確率はすべての債券に共通で 2%に等しいと仮定する．債券の現在価格は 100 円である．もしデフォルトがなければ，t 時点で (例えば，今から 1 年後)105 円支払われる．デフォルトが起きれば払い戻しはない．よって，債券 i の損失 L_i はデフォルトすれば 100 円，そうでなければ -5 円に等しく，L_i は $P(L_i=-5)=0.98$ と $P(L_i=100)=0.02$ を満たす iid 確率変数列をなす．

ここで，現在価値が 10000 円に等しい 2 つのポートフォリおけば，オを考える．ポートフォリオ A は全く集中しており，100 単位の債券 1 から成る．ポートフォリオ B は完全に分散化されており，各債券 1 単位ずつで構成されている．経済学的直観によれば，ポートフォリオ B はポートフォリオ A よりもリスクが少なく，よってより小さい VaR をもつべきである．そこで両方のポートフォリオの VaR を許容水準 $\alpha=5\%$ で計算してみよう．

ポートフォリオ A に対しては，損失が $L_A=100L_1$ で与えられるから，$\mathrm{VaR}_{0.95}(L_A)=100\mathrm{VaR}_{0.95}(L_1)=-500$ を得る．これはリスク資本 500 円を**引き出した**としても，ポートフォリオ A は水準 95%の VaR を用いている規制当局にとって，依然として許容可能であるということを意味する．

一方，ポートフォリオ B については損失が $L_B=\sum_{i=1}^{100}L_i$ であり，これは 2 項分布をもつ確率変数 $M\sim\mathrm{Bin}(100,0.02)$ をとって $105M-500$ としたものと同じ分布をもつことを用いて計算すれば，$\mathrm{VaR}_{0.95}(L_B)=25$ となる．この場合，銀行は許容水準 95%の VaR を用いている規制当局を満足させるためには，リスク資本として 25 円だけ**追加的に**必要になる．明らかに，ポートフォリオ B に要請されるリスク資本はポートフォリオ A よりも大きいのである．

これは，VaR を用いたリスク計測により明らかに不合理な結果が導かれる可能性があることを例証している．さらにこの例により，VaR は一般に劣加法的でないことがわかる．実際，いかなる法則不変な整合的リスク尺度 ρ に対しても，

$$\rho\left(\sum_{i=1}^{100}L_i\right) \le \sum_{i=1}^{100}\rho(L_i) = 100\rho(L_1) = \rho(100L_1)$$

が成り立たねばならない．つまり，このような ρ に対しては，必ずポートフォリオ A に対するリスク資本要件がポートフォリオ B に対するものよりも大きくなるはずなのである．VaR は平行移動共変性，正同次性，単調性，法則不変性は常に満たすから，この例は劣加法性が成り立たない場合があることを例示しているということになる．

上の例では，ポートフォリオを構成する資産が非常に歪んだ損失分布をもつという事実により，VaR の非劣加法性がもたらされたと言える．ポートフォリオにデフォルトし得る債券やオプションが組み込まれている場合，このような状況は実際に起こる可能性がある．一方，この例の資産は独立であり，従属構造としては当たり障りのないものであることに注意しよう．

別の反例として，個々の資産の損失分布は滑らかで対称であるが，従属構造，あるいは接合関数 (copula) が特殊で，極めて非対称な形である場合にも，VaR が劣加法性を満たさないことがあり得る（McNeil, Frey and Embrechts [2005]，例 6.22 参照）．さらに，基礎となる確率変数が独立だが非常に重い裾をもつ場合（平均が無限大となるパレート分布が用いられている）にも，VaR が劣加法的を満たさない例がある（Embrechts, McNeil and Straumann [2002]，例 7 を参照）．

次の事実は，VaR ユーザにとっての数少ない良い知らせの 1 つである．楕円型分布をもつリスク因子の一次結合として表されるポートフォリオのみが考察対象であるという理想化された状況では，VaR は劣加法的，よって整合的となることが知られている（McNeil, Frey and Embrechts [2005] の定理 6.8 を見よ）．

さらなる VaR の問題として指摘されてきているものは，(i) VaR を制約条件として用いた最適化の不合理性（Basak and Shapiro [2001]），(ii) VaR が基本的に損失の確率のみをコントロールし，実際に起こりうる損失額は考慮に入れないという事実を巧みに利用して，悪意を持って操作できるという可能性（Boyle, Hardy and Vorst [2005]）である．

歪みリスク尺度の視点から見れば，VaR は次の歪み関数

$$D_\alpha^{\mathrm{VaR}}(u) = \mathbf{1}_{[1-\alpha,1]}(u), \quad 0 < \alpha < 1$$

を用いて歪み期待値の形に書くことができる．ここで $\mathbf{1}_A$ は集合 A の指示関数である．しかし，この D は凸ではないことから，VaR は整合的ではないことがわかる．

2.3 期待ショートフォール

期待ショートフォール（Expected Shortfall）は，保険分野では CTE（条件付き裾期待値）と呼ばれることが多く，他にも tail VaR，conditional VaR といった呼び名があるが，本稿では一貫して期待ショートフォールと呼ぶことにする．

この期待ショートフォールは，損失が VaR を上回ったときに被る期待損失

$$\begin{aligned}\mathrm{ES}_\alpha(X) &= \frac{1}{\alpha}\int_{1-\alpha}^{1} F_X^{-1}(u)\,du \\ &\approx \mathbf{E}(X \mid X \geq \mathrm{VaR}_\alpha(X))\end{aligned}$$

として定義される．VaR では，小さい確率で大損失が起こった場合の損失の大きさを捉えることができないという批判，そして上述のように VaR には様々な理論的欠点もあることから，このリスク尺度は VaR に代わる整合的なものとして Artzner et al. [1999] で提案された．さらに，Acerbi and Tasche [2002] や Tasche [2002] によって詳細に研究され，Rockafellar and Uryasev [2000] では，期待ショートフォールが扱いやすい凸最適化の値として与えられるという計算上有効な結果も得られている．保険分野での（特にカナダにおける）応用については，Boyle, Hardy and Vorst [2005]，Hardy [2003]，Hardy and Wirch [2004] 等を参照せよ．

期待ショートフォールは

$$D_\alpha^{\mathrm{ES}}(u) = \frac{1}{\alpha}\big[u-(1-\alpha)\big]_+, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (2.1)$$

ととることにより，歪み期待値の形に表される (ここで，$x_+ = \max\{x, 0\}$)．この歪み関数は凸であるから，期待ショートフォールは法則不変性と共単調加法性を満たす整合的なリスク尺度である．

2.4 歪みリスク尺度と確率順序

歪みリスク尺度は，確率順序を保存するという良い性質をもっている．これについて述べるために，次の定義を思い起こしておこう．

定義 2.12. F と G を $\mathbb{R}$ 上の分布関数とする．

(i) G が F よりも**確率的に大きい** (stochastically larger) とは，任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して，$G(x) \leq F(x)$ が成り立つことである．これを記号で $F \preceq_{\mathrm{st}} G$ と書く．

(ii) G が**増加凸順序** (increasing convex order) (あるいは**損切り順序**(stop loss order)) の意味で F よりも大きいとは，任意の増加凸関数 h に対して，$\int h(x)\,dF(x) \leq \int h(x)\,dG(x)$ が成り立つことである．これを記号で $F \preceq_{\mathrm{icx}} G$ と書く．

(iii) F が G よりも**危険度が低い** (less dangerous) とは，$x_0 \in \mathbb{R}$ が存在して，

$$\begin{cases} F(x) \leq G(x), & x < x_0 \\ G(x) \leq F(x), & x \geq x_0 \end{cases}$$

かつ $\int x\,dF(x) \leq \int x\,dG(x)$ が成り立つことである．これを記号で $F \preceq_{\mathrm{D}} G$ と書く．

また，X の分布関数が F，Y の分布関数が G のとき，$X \preceq_{\mathrm{st}} Y$，$X \preceq_{\mathrm{D}} Y$，$X \preceq_{\mathrm{icx}} Y$ はそれぞれ $F \preceq_{\mathrm{st}} G$，$F \preceq_{\mathrm{D}} G$，$F \preceq_{\mathrm{icx}} G$ を意味するものとする．

確率分布の順序付けについては，Müller and Stoyan [2002] に詳しい．

次の結果は，2 つの分布関数について上記の確率的順序付けがある場合に，凸歪み関数を用いて得られる歪み分布関数についてもその順序付けが保存されるということを述べている．

定理 2.13. $D \in \mathscr{D}_{\mathrm{cx}}$ とするとき，

(i) $F \preceq_{\mathrm{st}} G$ ならば，$D \circ F \preceq_{\mathrm{st}} D \circ G$.

(ii) $F \preceq_{\mathrm{D}} G$ ならば，$D \circ F \preceq_{\mathrm{D}} D \circ G$.

(iii) $F \preceq_{\mathrm{icx}} G$ ならば，$D \circ F \preceq_{\mathrm{icx}} D \circ G$.

ただし，(ii) と (iii) では，$F, G, D \circ F, D \circ G$ の平均がすべて存在すると仮定する．

次の系は定理 2.13 から直ちに導かれる．

系 2.14. $D \in \mathscr{D}_{\mathrm{cx}}$ とするとき，$X, Y \in L^{\infty}$ に対して，

(i) $X \preceq_{\mathrm{st}} Y$ ならば，$\rho_D(X) \leq \rho_D(Y)$．

(ii) $X \preceq_{\mathrm{D}} Y$ ならば，$\rho_D(X) \leq \rho_D(Y)$．

(iii) $X \preceq_{\mathrm{icx}} Y$ ならば，$\rho_D(X) \leq \rho_D(Y)$．

これらの結果の証明は，Tsukahara [2006] を参照せよ．また，関連した結果として Leitner [2005] がある．これらはリスク尺度を保険料計算原理として考えた場合には当然必要とされる性質である．さらに，経済学の効用理論でも，リスクの順序付けとして増加凸順序は重要なものである（Rothschild and Stiglitz [1970]）．

3 統計手法

いったん用いるべきリスク尺度が決定されれば（歪みリスク尺度の場合には，歪み関数 D の具体的な関数形を定めることを意味する），次に必要になるのは精度の良い推定値である．

リスク因子に関する n 個の観測値 $\boldsymbol{Z}_{t-n+1}, \ldots, \boldsymbol{Z}_t$ が得られるとしたとき，$X_{t+1} = f(\boldsymbol{Z}_{t+1})$ の分布が推定対象の損失分布となる．ここで，X_{t+1} の分布といった場合に，条件付分布か無条件の分布なのかを区別する必要がある．今，時点 t までに得られる情報を表す σ 集合体を $\mathscr{F}_t$ とすると（多くの場合，$\mathscr{F}_t = \sigma(\boldsymbol{Z}_s \colon s \leq t)$ である），条件付分布とは $\mathbf{P}(X_{t+1} \leq x \,|\, \mathscr{F}_t)$ のことを指し，無条件分布は当然 $\mathbf{P}(X_{t+1} \leq x)$ となる．

もし時系列 $(\boldsymbol{Z}_t)$ に対して仮定されるモデルが非定常であるとすると，どちらの分布を用いるにせよ，かなり明示的にモデルを特定化しておかない限り，推定は難しい問題である．また，そのことによりモデルリスクも増大する．ここでは，$(\boldsymbol{Z}_t)$ は定常であると仮定する．したがって $\mathbf{P}(X_{t+1} \leq x)$ はその定常分布の下で計算されることになる．この無条件の分布の方が長期的な安定性をもつことから，より測定対象期間（time horizon）の長い信用リスク管理や保険では，こちらが好まれることが多い．それに対して，条件付分布は直近のリスク因子の動きを反映させたものであり，市場リスクを管理する場合に適していると言われている．

ここでの我々の目的は，リスク尺度の値 $\rho(X_{t+1})$ を推定することである．以下では，これまで VaR などに用いられてきた推定方法をやや一般化した形で説明する．

3.1 分散共分散法（デルタ正規法）

このアプローチでは，リスク因子の正規性を仮定し，さらに損失 X_{t+1} をリスク因子 $\boldsymbol{Z}_{t+1}$ の線形関数で近似する．したがって，X_{t+1} も正規分布に従うことになり，$\rho(X_{t+1})$ の計算は条件付分布の下でも，無条件の分布の下でも容易である．

ただし，オプションを含んだポートフォリオや債券ポートフォリオなど線形近似は不適切な場合も多く，また正規性の仮定も一般に金融データに関して定型化された事実に反し，現実的ではない．もちろん，線形近似の自然な拡張として，2 次関数による近似も考えられようが (デルタ・ガンマ正規法)，応用範囲は限定的である．

3.2 過去実績型（historical）シミュレーション法

このアプローチでは，まず $\boldsymbol{Z}_1, \ldots, \boldsymbol{Z}_t$ から，$\widetilde{X}_1 = f(\boldsymbol{Z}_1), \ldots, \widetilde{X}_t = f(\boldsymbol{Z}_t)$ を作る．そして，X_{t+1} の分布を $\widetilde{X}_1, \ldots, \widetilde{X}_t$ の経験分布関数で推定する．そこで，推定対象である $\rho(X_{t+1})$ を対応する経験分布の汎関数で推定するという極めて統計的には自然な推定法である．ただし，この方法は無条件の分布に対してのみ適用可能である．

さらに，この方法によって高い精度をもつ推定値を得るためには，十分な量の同期したリスク因子データが必要という難点がある．その上（これは純粋に統計的な方法に対しては共通に言えることだが），将来の構造変化を考慮に入れることはできない．そのため，シナリオ・テストなどと併用する必要があると言われている．

実際に，対象となるポジションの損失そのものの観測値 $X_{t-n+1}, \ldots, X_t$ が分布 F_X に従う確率変数列として得られる場合に，歪みリスク尺度

$$\rho(X) = \int_{[0,1]} F_X^{-1}(u)\, dD(u)$$

の自然な推定量は

$$\widehat{\rho}(X) = \int_{[0,1]} \mathbb{F}_n^{-1}(u)\,dD(u)$$

で与えられる．ここで，$\mathbb{F}_n$ は $X_{t-n+1}, \ldots, X_t$ に基づく経験分布関数である．この推定量は $c_i := D\left(\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$ とおけば，$\sum_{i=1}^n c_i X_{(i)}$ という L 統計量の形になることがすぐわかる．よって，$X_{t-n+1}, \ldots, X_t$ が iid であれば，Shorack and Wellner [1986] などの経験過程とノンパラメトリック統計学に関する書物に述べられている漸近理論を適用することが可能である．それによれば，D と F_X に対するある種の正則条件の下で，$n \to \infty$ のとき，大数の法則

$$\widehat{\rho}(X) \to \rho(X), \ \mathbf{P}\text{-a.s.}$$

や中心極限定理

$$\sqrt{n}\big(\widehat{\rho}(X) - \rho(X)\big) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, \sigma^2)$$

が成り立つことを示せる（ここでは σ の表現は煩雑なので与えない）．さらに，(X_t) が定常性を満たす GARCH モデルなどの非 iid の場合についても，同様の主張が成り立つことがわかってきている（Tsukahara [2007]）．これによりリスク尺度の値に対する信頼区間を構成することが可能になるという点は重要である．ただし，これらの結果が成り立つための正則条件は D の密度関数 d と F_X^{-1} の 1 の近傍における挙動にかなりの制限を与えるため，用いるリスク尺度によっては実用的とは言えない．このためには，従属性をもつ確率変数列に対する極値理論（EVT）などを援用する必要があると考えられる．

3.3 モンテカルロ・シミュレーション法

最後に，モンテカルロ・シミュレーション法と呼ばれる方法を解説する．まず，リスク因子に対するパラメトリック・モデルを選び，必要なら $\boldsymbol{Z}_1, \ldots, \boldsymbol{Z}_t$ を用いてそのパラメータを推定する．次に，$\boldsymbol{Z}_{t+1}$ の分布（条件付分布と無条件の分布のどちらも可能である）から $\widetilde{\boldsymbol{Z}}_{t+1}^{(1)}, \ldots, \widetilde{\boldsymbol{Z}}_{t+1}^{(m)}$ を擬似発生させ，$\widetilde{X}_{t+1}^{(i)} = f(\widetilde{\boldsymbol{Z}}_{t+1}^{(i)})$, $i = 1, \ldots, m$ を用いて $\rho(X_{t+1})$ を推定すればよい．

欠点は当然モデルリスクが大きいということである．リスク因子に対して仮定するパラメトリック・モデルが真のモデルとかなり乖離している場合には，結果として不適当なリスク計測結果を招くことになる．また，用いるモデルや対象となるポートフォリオの大きさによっては，計算上の負荷が大きくなることも欠点として挙げられる．

推定に関する課題

以上述べた 3 つの方法は，これまで主に市場リスクに関して適用されてきたものである．これらについて，条件付分布を用いるのか，無条件の分布を対象とするのかは意見が分かれるところである．条件付の議論では，通常パラメトリックなモデルが不可欠であり，モデルリスクにさらされる度合も大きくなり，得られる値も安定性を欠くことが多い．McNeil and Frey [2000] のアプローチでは，パラメトリック GARCH モデリングと擬最尤法で条件付ボラティリティを推定し，誤差項分布の中心部分に過去実績型アプローチ，裾部分には極値理論アプローチを用いて推定を行う．そして，最終的に推定した条件付損失分布から VaR や期待ショートフォールの推定値を得ているのだが，この方法はある程度の成功を収めており注目に値するであろう．

推定に共通の課題としては，当然のことだが，より優れたモデルと統計手法の開発が急務である．そのために有望なトピックは，多変量極値理論の利用，モデルの頑健性の議論，リスク因子の従属性モデリング（接合関数アプローチ），そしてマルコフ連鎖モンテカルロ法に代表されるベイズ的手法の応用が挙げられる．変額年金保険のリスク管理に関する基本文献である Hardy [2003] では，様々なモデルと統計手法が用いられているが，いくつかの問題点も指摘されている（秋山・国友 [2006]）．これらの課題は，多期間リスク尺度の実装化の試みが始まるにつれて，より複雑だが取り組む価値のあるものとなるであろう．

4 歪みリスク尺度の 1 パラメータ族

本節では，筆者が Tsukahara [2006] において提案しているリスク尺度族について，あまり厳密性にこだわらずに簡単な解説を行う．

まず，期待ショートフォールに対する歪み関数

(2.1) に対して，

(i) $D^{\mathrm{ES}}_{\alpha_1} \circ D^{\mathrm{ES}}_{\alpha_2} = D^{\mathrm{ES}}_{\alpha_1\alpha_2}$ $(0 < \alpha_1,\ \alpha_2 < 1)$

(ii) $\alpha_1 \geq \alpha_2$ ならば，$D^{\mathrm{ES}}_{\alpha_1} \preceq_{\mathrm{st}} D^{\mathrm{ES}}_{\alpha_2}$

(iii) $D^{\mathrm{ES}}_1(u) = u, \quad \lim_{\alpha\downarrow 0} D^{\mathrm{ES}}_{\alpha}(u) = \mathbf{1}_{\{1\}}(u)$

が成り立つことに注意する．

ここで，歪みリスク尺度における D の関数形を具体的に定めるために，パラメトライズされた歪み関数の族 $\{D_\theta\}$ を考え，期待ショートフォールとの比較可能性のために次の条件を課してみよう．

(i) $D_{\theta_1} \circ D_{\theta_2} = D_{\theta_1\theta_2}$

(ii) 任意の分布関数 F に対して，

$$\theta_1 < \theta_2 \quad \Rightarrow \quad D_{\theta_1} \circ F \succeq_{\mathrm{st}} D_{\theta_2} \circ F$$

すなわち，$D_\theta(u)$ が θ に関して狭義増加である．

(iii) 各 θ に対して， $u \mapsto D_\theta(u)$ は狭義増加である．

これらの条件に連続性を加えると，平行移動方程式（translation equation）と呼ばれる，関数方程式の理論における初等的な方程式に関する結果（Aczél [1966] 参照）を用いて，次の定理が得られる．

定理 4.1. $D_\theta(u)$ が上の条件 (i), (ii), (iii) と連続性の条件を満たすならば，ある狭義増加な $\mathbb{R}$ 上の連続分布関数 Ψ が存在して，

$$D_\theta(u) = \Psi(\Psi^{-1}(u) + \log\theta), \qquad (4.1)$$

という形になる。逆に Ψ がそのような分布関数ならば，(4.1) の形の歪み関数族は上の条件を満たす。

(4.1) の D_θ は，期待ショートフォールの歪み関数と同様に，$D_1(u) = u$ と $\lim_{\alpha\downarrow 0} D_\theta(u) = \mathbf{1}_{\{1\}}(u)$ を満たしている．結果として得られるリスク尺度が整合的であるためには，$D_\theta(u)$ が u に関して凸でなければならない．そこで，(4.1) の Ψ が 2 回微分可能とし，$\psi(x) = \frac{d}{dx}\Psi(x)$，$\psi'(x) = \frac{d}{dx}\psi(x)$ とおく．このとき，

$$d'_\theta(u) := \frac{\partial^2}{\partial u^2} D_\theta(u)$$

を Ψ, ψ, ψ' を用いて表し，$d'_\theta(u) \geq 0$ のための条件を求めると，ψ が強単峰であり（すなわち $\log\psi$ が凹），かつ $0 < \theta \leq 1$ となる．

まとめると，強単峰な密度を持つ Ψ を選んで (4.1) の形の歪み関数を作ると，D_θ は $0 < \theta \leq 1$ のとき凸であり，

$$\rho_\theta(X) := \int_{[0,1]} F_X^{-1}(u)\, dD_\theta(u)$$

は法則不変性と共単調加法性を満たす整合的リスク尺度となる．そして期待ショートフォールに対応する歪み関数と同様の性質

$$D_1(u) = u, \quad \lim_{\theta\downarrow 0} D_\theta(u) = \mathbf{1}_{\{1\}}(u),$$

$$D_{\theta_1} \circ D_{\theta_2} = D_{\theta_1\theta_2}$$

をもつのである．

この歪み関数の形は統計学ではよく知られており，次のように解釈される．$\kappa(u) = \exp[\Psi^{-1}(u)]$ とおくと，元の分布関数 F と歪み分布関数 $G = D_\theta \circ F$ の間には，$\kappa(G(x)) = \theta\kappa(F(x))$ という関係が成り立つ．つまり，分布によって定まるある種の関数が比例しているということになる．これをいくつかの例について見ておこう：

例 4.2. 最もよく知られている歪み関数は**比例ハザード**に対応するものであり，

$$D^{\mathrm{PH}}_\theta(u) = 1 - (1-u)^\theta$$

で与えられる．このとき，$\kappa(u) = -\log(1-u)$ は累積ハザード関数であり，$\Psi(x) = 1 - \exp\{-e^x\}$（グンベル分布関数）ととれば，(4.1) の形になる．

例 4.3. **比例オッズ**も統計学ではよく用いられるモデルの 1 つであり，対応する歪み関数は

$$D^{\mathrm{PO}}_\theta(u) = \frac{\theta u}{1 - (1-\theta)u}$$

である．この例では，$\kappa(u) = u/(1-u)$ はいわゆるオッズ比であり，(4.1) の Ψ としては，$\Psi(x) = 1/(1+e^{-x})$（ロジスティック分布関数）ととればよい．

例 4.4. 統計学ではガウス変換モデルとして知られるが，(4.1) で $\Psi(x) = \Phi(x)$（標準正規分布関数）ととった歪み関数

$$D^{\mathrm{GA}}_\theta(u) = \Phi(\Phi^{-1}(u) + \log\theta)$$

を用いた歪みリスク尺度は，保険数理では**ワン変換**という名の保険料計算原理としてよく知られている．だが，$\kappa(u) = \exp[\Phi^{-1}(u)]$ の意味はうまくつかないのが難点である．

Tsukahara [2006] での結果によれば，比例ハザードやワン変換を用いた歪みリスク尺度は，正規分布のような裾の軽い分布に対してさえ，安定的に数値計算できない．一方，比例オッズ歪み関数に基づくリスク尺度は，計算上も安定しており，今後使い道がある可能性のあるものとして期待される．

5 おわりに

以上，単一期間のリスク尺度について述べてきたが，筆者の能力不足もあり，現在盛んに研究が行われているいくつかのトピックについては述べることができなかった．その最たるものは，保険数理でも話題になっている多期間リスク尺度である．ある終点 T で生じる損失 X に対する時点 $t\,(<T)$ でのリスク尺度は，t までの情報を $\mathscr{F}_t$ で表したとき，条件付分布関数 $F_t(x) := \mathbf{P}(X \leq x \mid \mathscr{F}_t)$ に対して歪みリスク尺度を適用し，

$$\rho_t(X) = \int_{[0,1]} F_t^{-1}(u)\, dD(u)$$

とするのが最も自然だと思われる．しかし，下に挙げるような最近の研究では，このようなリスク尺度は通時一貫性（time consistency）をもたないという欠点が指摘されている．

この通時一貫性の欠如を補うために，Hardy and Wirch [2004] や Boyle, Hardy and Vorst [2005] では，反復 CTE（iterated CTE）という方法が提案されている．これは，本稿で述べてきた（法則不変な）単一期間のリスク尺度を，通時一貫性を満たす多期間リスク尺度に拡張する有効な方法であると考えられるが，Kusuoka and Morimoto [2004] で述べられているように，極限をとって連続時間へ移行する際に，彼女らの定義そのままでは問題が発生するため，これに対する何らかの修復が必要である．

もちろん，この通時一貫性は他の整合性の公理と同様に，ある見地からはもっともらしいとされる公理論的要請であるから，常に満たされなければならないかというとそれは対象となる問題によると言えよう．リスク尺度が規制上の必要資本という規範的な側面を強調するものであれば，当然その決定は動学的に見ても首尾一貫したものである必要があるが，現実問題として直観的には合理的な人間の行動が通時一貫性をもっていないこともしばしば議論の的となっている．また，終点 T がどんどん繰り越されていく rolling horizon の場合には，通時一貫性がどのような形で適用されるべきなのかもはっきりしない．

離散時間での通時一貫性を扱った多期間リスク尺度に関する論文が近年多く出版されているので，筆者が気づいた範囲で列挙しておく：Artzner et al. [2002], [2006], Cheridito, Delbaen and Kupper [2006]，Frittelli and Scandolo [2006]，Riedel [2004]，Weber [2006]．また，連続時間の多期間モデルについては，Bion-Nadal [2006], Cheridito, Delbaen and Kupper [2004], [2005]，Delbaen [2006]，Frittelli and Rosazza Gianin [2004] などを参照されたい．いずれの論文も通時一貫性をもつ整合的リスク尺度の表現定理を主題とした理論的研究であり，実務への応用はまだこれから発展すべき段階にある．

他に解説できなかった話題としては，リスク尺度を用いた資本配分の問題がある．この興味深い問題については，McNeil, Frey and Embrechts [2005] の 6.3 節に簡潔な解説があるが，詳しくは Delbaen [2000]，Denault [2001]，Kalkbrener [2005]，Tsanakas [2004] に当たってみられることをお勧めする．

経済学との関連では，von Neumann and Morgenstern [1953]，あるいは Savage [1972] に始まる不確実性の下での期待効用理論（読みやすい教科書としては Kreps [1988] がある）に対する批判から提案された双対選択理論（Yaari [1987]，Schmeidler [1989]）がリスク尺度の理論と深い関係にある．つまり彼らの導いた表現定理でも，効用関数が歪み期待値として表されるのである．さらに，その動学的拡張である Gilboa and Schmeidler [1993]，Epstein and Schneider [2003]，Wang [2003] では，動学的一貫性（dynamic consistency）の概念が議論されており，近年の多期間リスク尺度の理論との関連もあって，非常に興味深い話題である．

参考文献

秋山豪太・国友直人 [2006]，「変額年金保険の統計的リスク管理法：局面転換モデルの利用」，『リスクと保険』, Vol. 2, 21–40.

松山直樹 [2005]，「変額年金保険のリスク管理（現状と課題）—ヒューマンセキュリティへの基盤研究—」, 総合政策学ワーキングペーパーシリーズ No. 61, 慶應義塾大学大学院 政策・メディア研究科（http://coe21-policy.sfc.keio.ac.jp/ja/wp/WP61.pdf）.

森平爽一郎 [2004]，「保険価格決定理論　保険数理とファイナンス理論の融合」，『アクチュアリージャーナル』, **54**，5–66.

森本祐司 [2000], 「金融と保険の融合について」, 『アクチュアリージャーナル』, **40**, 24–75.

Acerbi, C. [2002], "Spectral measures of risk: A coherent representation of subjective risk aversion", *Journal of Banking & Finance*, **26**, 1505–1518.

Acerbi, C. [2004], "Coherent representation of subjective risk-aversion", in Szegö (ed.) [2004], pp. 147–207, John Wiley & Sons, Chichester.

Acerbi, C. and D. Tasche [2002], "On the coherence of expected shortfall", *Journal of Banking & Finance*, **26**, 1487–1503.

Aczél, J. [1966], *Lectures on Functional Equations and Their Applications*, Academic Press, New York-London.

Artzner, P. [1999], "Application of coherent risk measures to capital requirements in insurance", *North American Actuarial Journal*, **3**, 11–25.

Artzner, P., F. Delbaen, J.-M. Eber and D. Heath [1997], "Thinking coherently", *RISK Magazine*, **10**, November, 68–71.

Artzner, P., F. Delbaen, J.-M. Eber and D. Heath [1999], Coherent measures of risk, *Mathematical Finance*, **9**, 203–228.

Artzner, P., F. Delbaen, J.-M. Eber, D. Heath and H. Ku [2002], "Coherent Multiperiod Risk Measurement", Working Paper. (`http://www.math.ethz.ch/~delbaen/`)

Artzner, P., F. Delbaen, J.-M. Eber, D. Heath and H. Ku [2006], "Coherent multiperiod risk adjusted values and Bellman's principle", to appear in *Annals of Operations Research*.

Basak, S. and A. Shapiro [2001], "Value-at-Risk-based risk management: Optimal policies and asset prices", *Review of Financial Studies*, **14**, 371–405.

Bion-Nadal, J. [2006], "Time Consistent Dynamic Risk Processes Cadlag Modification", Preprint.

Boyle, P., M. Hardy and T. Vorst [2005], "Life after VaR", *Journal of Derivatives*, Fall, 48–55.

Cheridito, P., F. Delbaen and M. Kupper [2004], "Coherent and convex monetary risk measures for bounded càdlàg processes", *Stochastic Processes and Their Applications*, **112**, 1–22.

Cheridito, P., F. Delbaen and M. Kupper [2005], "Coherent and convex monetary risk measures for unbounded càdlàg processes", *Finance and Stochastics*, **9**, 369–387.

Cheridito, P., F. Delbaen and M. Kupper [2006], "Dynamic monetary risk measures for bounded discrete-time processes", *Electronic Journal of Probability*, **11**, 57–106.

Cherny, A. S. [2006], "Weighted V@R and its properties", *Finance and Stochastics*, **10**, 367–393.

Choquet, G. [1955], "Theory of Capacities", *Annales de l'Institute Fourier*, **5**, 131–295.

Crouhy, M., D. Mark and R. Galai [2001], *Risk Management*, McGrow-Hill, New York
(邦訳:『リスクマネジメント』(2004, 三浦良造他訳), 共立出版).

Delbaen, F. [2000], *Coherent Risk Measures*, Lectures given at the Cattedra Galileiana at the Scuola Normale di Pisa, March 2000. (`http://www.math.ethz.ch/~delbaen/`)

Delbaen, F. [2002], "Coherent risk measures on general probability spaces", in *Advances in Finance and Stochastics*, eds. K. Sandmann and P. J. Schönbucher, pp. 1–37, Springer-Verlag, Berlin.

Delbaen, F. [2006], "The structure of m-stable sets and in particular of the set of risk neutral measures", in *In Memoriam Paul-André*

Meyer Séminaire de Probabilités XXXIX, eds. M. Émery and M. Yor, pp. 215–258, Springer-Verlag, Berlin.

Denault, M. [2001], "Coherent allocation of risk capital", *Journal of Risk*, **4**, 1–34.

Denneberg, D. [1990], "Premium calculation: Why standard deviation should be replaced by absolute deviation", *ASTIN Bulletin*, **20**, 181–190.

Denneberg, D. [1994], *Non-additive measures and integral*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London.

Detlefsen, K. and G. Scandolo [2005], "Conditional and dynamic convex risk measures", *Finance and Stochastics*, **9**, 539–561.

Dhaene, J., M. Denuit, M. J. Goovaerts, R. Kaas and D. Vyncke [2002a], "The concept of comonotonicity in actuarial science and finance: theory", *Insurance: Mathematics and Economics*, **31**, 3–33.

Dhaene, J., M. Denuit, M. J. Goovaerts, R. Kaas and D. Vyncke [2002b], "The concept of comonotonicity in actuarial science and finance: applications", *Insurance: Mathematics and Economics*, **31**, 133–161.

Dowd, K. [1998], *Beyond Value at Risk: The New Science of Risk Management*, John Wiley & Sons, Chichester.

Duffie, D. and J. Pan [1997], "An overview of value at risk", *Journal of Derivatives*, **4**, Spring, 7–49.

Embrecht, P. [2000], "Actuarial versus financial pricing of insurance", *Journal of Risk Finance*, **1**, 17–26.

Embrechts, P., A. McNeil and D. Straumann [2002], "Correlation and dependence in risk management: properties and pitfalls", in: *Risk Management: Value at Risk and Beyond*, ed. M. A. H. Dempster, pp. 176–223, Cambridge University Press, Cambridge.

Epstein, L. G. and M. Schneider [2003], "Recursive multiple-priors", *Journal of Economic Theory*, **113**, 1–31.

Föllmer, H. and A. Schied [2002a], "Robust preferences and convex measures of risk", in *Advances in Finance and Stochastics*, eds. K. Sandmann and P. J. Schönbucher, pp. 39–56, Springer-Verlag, Berlin.

Föllmer, H. and A. Schied [2002b], "Convex measures of risk and trading constraints", *Finance and Stochastics*, **6**, 429–447.

Föllmer, H. and A. Schied [2002c], *Stochastic Finance: An Introduction in Discrete Time*, Walter de Gruyter, Berlin.

Frittelli, M. and E. Rosazza Gianin [2002], "Putting order in risk measures", *Journal of Banking & Finance*, **26**, 1473–1482.

Frittelli, M. and E. Rosazza Gianin [2004], "Dynamic convex risk measures", in Szegö (ed.) [2004], pp. 227–248.

Frittelli, M. and E. Rosazza Gianin [2005], "Law invariant convex risk measures", *Advances in Mathematical Economics*, **7**, 33–46.

Frittelli, M. and G. Scandolo [2006], "Risk measures and capital requirements for processes", *Mathematical Finance*, **16**, 589–612.

Gilboa, I. and D. Schmeidler [1993], "Updating umbiguous beliefs", *Journal of Economic Theory*, **59**, 33–49.

Grabisch, M., T. Murofushi and M. Sugeno (eds.) [2000], *Fuzzy Measures and Integrals: Theory and Applications*, Physica-Verlag, Heidelberg.

Hardy, M. [2003]. *Investment Guarantees: Modeling and Risk Management for Equity-Linked Life Insurance*, John Wiley & Sons, New York.

Hardy, M. R. and J. L. Wirch [2004], "The iterated CTE: A dynamic risk measure", *North American Actuarial Journal*, **8**, 62–75.

Harrington, S. E. and G. R. Niehaus [2003], *Risk Management and Insurance*, 2nd ed., McGrow Hill, New York （邦訳：『保険とリスクマネジメント』（2005，米山高生・箸方幹逸監訳），東洋経済新報社）．

Huber, P. J. [1981], *Robust Statistics*, John Wiley & Sons, New York.

Hull, J. [2007], *Risk Management and Financial Institutions*, Pearson Education, Upper Saddle River, New Jerzey.

Jorion, P. [2001], *Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk*, 2nd ed., McGrow-Hill, New York.

Jouini, E., W. Schachermayer and N. Touzi [2006], "Law Invariant Risk Measures have the Fatou Property", *Advances in Mathematical Economics*, **9**, 49–71.

Kalkbrener, M. [2005], "An axiomatic approach to capital allocation", *Mathematical Finance*, **15**, 425–437.

Kreps, D. M. [1988], *Notes on the Theory of Choice*, Westview Press, Boulder, Colorado.

Kusuoka, S. [2001], "On law invariant coherent risk measures", *Advances in Mathematical Economics*, **3**, 83–95.

Kusuoka, S. and Y. Morimoto [2004], "Homogeneous Law Invariant Coherent Multiperiod Value Measures and Their Limits", UTMS Preprint Series, 2004–37, Graduate School of Mathematical Sciences, University of Tokyo (`http://kyokan.ms.u-tokyo.ac.jp/users/preprint/pdf/2004-37.pdf`).

Lehmann, E. L. [1953], "The power of rank tests", *Annals of Mathematical Statistics*, **24**, 23–43.

Leitner, J. [2005], "A short note on second-order stochastic dominance preserving coherent risk measures", *Mathematical Finance*, **15**, 649–651.

McNeil, A. J. and R. Frey [2000], "Estimation of tail-related risk measures for heteroscedastic financial time series: an extreme value approach", *Journal of Empirical Finance*, **7**, 271–300.

McNeil, A. J., R. Frey and P. Embrechts [2005], *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques, and Tools*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

Müller, A. and D. Stoyan [2002], *Comparison Methods for Stochastic Models and Risks*, John Wiley & Sons, Chichester.

Pearson, N. D. [2002], *Risk Budgeting*, John Wiley & Sons, New York.

Puppe, C. [1994], *Distorted Probabilities and Choice under Risk*, Springer-Verlag, Berlin.

Riedel, F. [2004], "Dynamic coherent risk measures", *Stochastic Processes and Their Applications*, **112**, 185–200.

Rockafellar, R. T. and S. Uryasev [2000], "Optimization of conditional Value-at-Risk", *Journal of Risk*, **2**, 21–42.

Rothschild, M. and J. E. Stiglitz [1970], "Increasing risk I: A definition", *Journal of Economic Theory*, **2**, 225–243.

Savage, L. J. [1972], *The Foundations of Statistics*, 2nd rev. ed., Dover Publications, New York.

Schmeidler, D. [1989], "Subjective probability and expected utility without additivity", *Econometrica*, **57**, 571–587.

Shorack, G. R. and J. A. Wellner [1986], *Empirical Processes with Applications to Statistics*, John Wiley & Sons, New York.

Smith, C. W., Jr. [1986], "On the convergence of insurance and finance research", *Journal of Risk and Insurance*, **53**, 693–717.

Szegö, G. (ed.) [2004], *Risk Measures for the 21st Century*, John Wiley & Sons, Chichester.

Tasche, D. [2002], "Expected shortfall and beyond", *Journal of Banking & Finance*, **26**, 1519–1533.

Tsanakas, A. [2004], "Dynamic capital allocation with distortion risk measures", *Insurance: Mathematics and Economics*, **35**, 223–243.

Tsukahara, H. [2006], "One-parameter Families of Distortion Risk Measures", Submitted.

Tsukahara, H. [2007], "Estimation of Distortion Risk Measures", in preparation.

von Neumann, J. and O. Morgenstern [1953], *Theory of Games and Economic Behavior*, 3rd ed., Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey.

Wang, S. S. [1995], "Insurance pricing and increased limits ratemaking by proportional hazards transforms", *Insurance: Mathematics and Economics*, **17**, 43–54.

Wang, S. S. [1996], "Premium calculation by transforming the layer premium density", *ASTIN Bulletin*, **26**, 71–92.

Wang, S. S. [2000], "A class of distortion operators for pricing financial and insurance risks", *Journal of Risk and Insurance*, **67**, 15–36.

Wang, S. S. and J. Dhaene [1998], Comonotonicity, correlation order and premium principles, *Insurance: Mathematics and Economics*, **22**, 235–242.

Wang, S. S., V. R. Young and H. H. Panjer [1997], "Axiomatic characterization of insurance prices", *Insurance: Mathematics and Economics*, **21**, 173–183.

Wang, T. [2003], "Conditional preferences and updating", *Journal of Economic Theory*, **108**, 286–321.

Weber, S. [2006], "Distribution-invariant risk measures, information, and dynamic consistency", *Mathematical Finance*, **16**, 419–441.

Yaari, M. E. [1987], "The dual theory of choice under risk", *Econometrica*, **55**, 95–115.

Risk Measures — Theory and Statistical Methods

Hideatsu Tsukahara

Department of Economics, Seijo University
6–1–20 Seijo, Setagaya-ku, Tokyo 157–8511, Japan
email address: tsukahar@seijo.ac.jp

Abstract

This is an expository paper on the concept of risk measure which is of much interest for actuaries as well as financial risk managers. After giving some motivation and risk measurement background, we introduce the axioms of coherent risk measure and explain their implication. Then the mathematical representation results according to Delbaen and Kusuoka are given without proofs. Two popular examples of risk measure, namely, value-at-risk and expected shortfall, are described in detail. Several statistical methods for estimating the value of risk measure are explained and some related problems are discussed. Based on the author's recent work, we present parametric families of distortion risk measures and their relation to Wang transform, which is well known in actuarial science. The paper concludes with a brief introduction to further topics on the theory and applications of risk measures.