ノート

「生命保険の証券化とその証券化商品の価格付け」

小島　茂*

2004年9月30日投稿
2005年2月18日受理

概要

本研究は，生命保険会社の死亡リスクを資本市場に移転させる証券化とその証券化商品である死亡リスク債券の価格付けについて取り扱ったものである．2003年12月にSwiss Reが実施した死亡リスクの証券化を参考に，証券化モデルおよび死亡リスクの原因となる死亡数の確率過程モデルを定式化し，その確率過程とオプション理論を用いて，死亡リスク債券に内包する定期保険を原資産とする派生資産のストップロス再保険について，無裁定理論価格モデルを提案した．

キーワード：

資本市場

死亡リスク移転

確率過程

オプション理論

無裁定理論価格

*東京海上日動フィナンシャル生命保険株式会社
〒150-0012 東京都渋谷区広尾5-6-6 広尾プラザ
email: shigeru.kojima@tmn-financial.co.jp

1 はじめに

最近になって，リスク管理の重要性が増している．その背景は，米国においては，エンロン，ワールド・コムの事件発生を受けて，2002年度の企業改革法が施行されたことにある．そのもとで，企業は，健全なコーポレート・ガバナンスの体制が要求され，具体的には，企業は，統合的リスクマネジメントを実施し，リスクマネジメント体制に関する情報開示が必要となった．それを受けて日本においても，2003年 3月31日の企業内容等の開示に関する内閣府令等の一部を改正する内閣府令第 28 号により，2003年4月以降，上場企業は，有価証券報告書にコーポレート・ガバナンスやリスク等に関する情報開示が義務付けられた．従って，企業は，リスク許容量を設定し，認識されたリスクを内部で管理するか，外部に移転するかを分類し管理しなければならない．証券化は，リスクを外部に移転する1つの手段である．

この証券化の技術は，現代ファイナンスの最も重要な変革の1つである．流動化する必要がある資産について，直接売却できる市場がないか，未熟な場合に証券化により，流動化が可能になる．1970年代にモーゲージローンの事例より始まり，それ以降，証券化の対象となる資産も多様化し，市場も急激に拡大を遂げて現在に至っている．証券化によって，新たな資金の流れを作ることで，経済の活性化を促す更なる効果が期待される．特にリスクの証券化は，資産自体がもつリスクを分析し，それに見合うプレミアムをのせることによって，資本市場へのリスクの転嫁を図ろうとするものである．リスクの保有者は，リスクを資本市場に移転できる．一方，投資家は，高い収益率を得，かつ一般の金融資産との相関係数が低い商品をポートフォリオに組み入れることができる．このようなことから，リスクの証券化市場が拡大してきている．

1994 年に保険会社にとって画期的な変化があった．Hannover Re(独)が初のカタストロフィー債券を発行したのである．それ以来，地震，ハリケーン等大災害を対象に市場が拡大している．その背景は，資本市場のリスク吸収力が，再保険市場に比べ格段の違いがあるためである．リスク管理の面で，資本市場は，さらに重要な役割を担うようになった．カタストロフィー債券は，保険会社が持つ偶発事象を対象にしたリスクの証券化商品である．これに対し，生命保険会社の通常事象を対象にしたリスクの証券化商品には，死亡リスク債券と生存リスク債券がある．ともに，将来の保険金等支払額についての不確実性をリスクとして，証券化したものである．具体的には，将来の一定以上の保険金等支払が生じたときにクーポンまたは，償還額が減少し，一方，一定未満の支払では，無リスク債券より高い利回りが得られる債券である．この利回りの無リスク金利を上回る部分は，この債券に内在するストップロス再保険の価格により決定される．従って，死亡リスク債券および生存リスク債券の価格付けは，ストップロス再保険の価格付けによって行われる．

カタストロフィー債券に遅れること 10年，2003年 12月にSwiss Reが世界初の生命保険の証券化である死亡リスク債券を発行した． Lin and Cox [2004]やCummins[2004]の研究によれば，死亡リスク債券の内容は，以下のとおりである．

(1) 発行額は，4億ドル
(2) 期間は，3年，発行日は，2003年12月で，償還日は，2007年1月である．
(3) クーポンレートは，Libor+1.35%である．
(4) 米国，フランス，スイス，英国，イタリアの国民死亡率に基づく 2002 年度の死亡率指標を 100 とし，償還日までに最も高い指標が130以上であれば，債券の元本が減少し，150 以上であれば，元本がゼロとなるインデックスタイプの死亡リスク債券である．

Swiss Reは，自身のリスク管理のために，内在する死亡リスクを資本市場に移転する証券化を実施したものと解釈できる．

このSwiss Reの証券化を参考に，生存リスクの証券化を研究したのが，Lin and Cox[2004]である．Lin and Cox[2004]は，生命年金保険を証券化した生存リスク債券とその理論価格モデルを提案して

いる．具体的には，65 歳以降の生存数が一定数を超えるとクーポンが減少する債券であり，死亡率の分布関数とリスクの市場価格(Market Price of Risk)を用いて，リスク中立ワン変換[1]によるストップロス再保険の無裁定理論価格モデルを提案した．資本市場に放出することを前提に考えるため，無裁定価格理論を導入している．

これに対し，本研究は，定期保険を保有している生命保険会社がその契約量の規模から大数の法則が働かないために生じる死亡リスクを，リスク許容量を考慮して証券化した死亡リスク債券とその理論価格モデルを考察した．具体的には，定期保険の契約集団を対象とし，直近 1 年間の死亡保険金支払総額の最高額が一定以上であれば，償還額が減少し，一方，一定未満であれば，無リスク債券より高い利回りが得られるゼロクーポン債券であり，死亡数の確率過程モデルに基づき，リスク中立エッシャー変換によりストップロス再保険の無裁定理論価格モデルを提案した．Swiss Re の死亡リスク債券と異なる点は，インデックスタイプの証券化ではなく，ベーシスリスクを排除するため，生命保険会社が保有する死亡リスクを直接対象とした特定タイプの証券化を想定したことである．

まず，不確実な将来の死亡保険金支払額を導き出す死亡数の確率過程を定式化する必要がある．この先行研究として，Milevesky and Promislow[2001]の平均回帰ブラウニアン・ゴンパーツモデル，Gaurilov and Gavriova[2001] の信頼性理論を応用した生存率確率過程モデル，および死亡率が毎年改善されていることをモデルに反映させるため，観察年度の自己回帰過程を求め，年齢によるパラメータとの一次結合として表した Lee and Cater [1992]の死亡率確率過程モデルがあげられる．

これに対し，本研究では，簡易生命表から，生命保険会社が保有する定期保険契約のウエイトの高い成人層について，同時出生人口の年齢別死亡率の対数が直線に近いことが判明した．そこで，簡易生命表を用いて，実際にコーホートによる時系列分析を行い，死亡数の連続時間確率過程モデルを求めることとした．この結果，時系列分析によるモデルは，趨勢のあるランダムウォークとなり，先行研究のモデルよりシンプルなモデルを提案した．つぎに，証券化により資本市場で評価することを前提に，リスク中立化法によりストップロス再保険の無裁定理論価格を求めることとした．

その結果，リスク中立エッシャー変換により，死亡リスク債券の価格付けとなるストップロス再保険の無裁定理論価格モデルを提案し，償還額を求めた．

本研究は，以下のような構成になっている．2 章では，本研究の生命保険の証券化モデルを示す．また，3 章では，死亡数の確率過程を示し，4 章では，死亡リスク債券の価格付けを示した．最後に 5 章で，本研究の結論と今後の課題について述べることとした．

2 生命保険の証券化モデル

この章では，生命保険の証券化モデルの説明を行う．具体的には，Lin and Cox[2004]の生存リスクを対象にした生命年金の証券化モデルを紹介し，本研究の死亡リスクを対象とした定期保険の証券化モデルを提案する．

Lin and Cox[2004]の証券化モデルは，通常事象である生存リスクを対象にした生命年金の証券化モデルである．具体的には，65 歳以降の生存数に基づく毎年の支払生命年金額が一定以上になるリスクを資本市場に移転する証券化モデルを提案した．証券化の契約形態は，生命保険会社と SPC(特別目的会社)との間でストップロス再保険契約を締結し，同時に SPC は，投資家に対し，生存リスク債券を発行する．具体的には，まず，再保険金 O_t を，条件により以下のとおりとしている．

条件 1 ：$l_{x+t} > W_t + C$

　　このとき　$O_t = 1000C$，

条件 2 ：$W_t < l_{x+t} \le W_t + C$

　　このとき　$O_t = 1000(l_{x+t} - W_t)$，

条件 3 ：$l_{x+t} \le W_t$

　　このとき　$O_t = 0$

ここに，

[1] ワン変換については，*Wang*[1995,2000] を参照されたい．

(1) l_{x+t} を $x+t$ 歳の生存数（生命年金受取人数），
(2) W_t を経過 t 時点のエクセスポイント，
(3) C は，再保険金 O_t の上限を示すパラメーター，
(4) t を経過時点とする．$0 \le t < T$

である
次に，生存リスク債券の内容は，

(1) クーポン債，
(2) 債券の期間を終身年金の一部T年に限定，
(3) 生存リスクは，債券のクーポン（U_t）にのみ反映する

こととしている．また，債券の経過t時点のクーポン U_t は，

条件 1 ：$l_{x+t} > C + W_t$
このとき　$U_t = 0$，
条件 2 ：$W_t < l_{x+t} \le C + W_t$
このとき　$U_t = 1000(C + W_t - l_{x+t})$，
条件 3 ：$l_{x+t} \le W_t$
このとき　$U_t = 1000C$

としている．
毎年の生存数 l_{x+t} が W_t を超えるとその期のクーポン U_t が減少し，さらに生存数が $W_t + C$ 以上であれば，その年のクーポンが0となる生存リスク債券である．これによって生命保険会社が保有する生命年金保険に関する生存率改善のリスクを資本市場に移転することができるのである．
これに対し，本研究は，通常事象である死亡リスクの証券化モデルを提案する．具体的には，生命保険会社が保有する1年以上経過した短期定期保険契約集団を直接証券化の対象とし，このなかの同一死亡リスク集団（同一年齢，性別，残存保険期間，保険金）ごとに，期間中の最高年間死亡保険金支払総額が一定以上となるリスクを資本市場に移転する証券化モデルである．また，証券化の契約形態は，生命保険会社とSPC(特別目的会社)との間でストップロス再保険契約（再保険金 S，保険料一時払 π）を締結し，同時にSPCは，投資家に対し，死亡リスク債券を発行する．また，投資家から集まった資金（投資額，所与とする）A と再保険料 π は，安全資産（無リスク資産）へ投資することとした．
次に，死亡リスク債券の仕組みは，

(1) ゼロクーポン債，
(2) 債券の期間を生命保険契約の残存保険期間に合わせて n 年，
(3) 死亡リスクは，債券の償還総額 B に反映する

ことと仮定する．
償還額 B は，投資額 A と再保険料 π を償還期まで，安全資産に投資した元利合計から，再保険金 S を減じたものとする．式で表すと，

$$B = (A + \pi)e^{rn} - S \qquad (2\text{-}1)$$

である．ここに，r を無リスク年率金利とする．
再保険金 S は，以下のように仮定した．

条件 1 ：$G \le \alpha$
このとき　$S = 0$，
条件 2 ：$\alpha < G \le \beta$
このとき　$S = A(\frac{G - \alpha}{\beta - \alpha})$，
条件 3 ：$G > \beta$
このとき　$S = A$

ここに，
(1) ω を債券発行時の定期保険契約の被保険者年齢とする．
(2) X を一人当たりの死亡保険金（定数）とし，その支払は，期末払とする．
(3) $d_\omega(t)$ を直近1年間すなわち経過期間[t-1, t]の死亡数とする．
(4) $Xd_\omega(t)$ を $d_\omega(t)$ に対する死亡保険金支払総額とする．

(5) $Xd_{\omega}(0)$ を債券発行時直前 1 年間の $d_{\omega}(0)$ に対する死亡保険金支払総額（実績：所与）とする.

(6) α をエクセス・ポイントとする.

(7) $\beta-\alpha$ をカバー額とする.

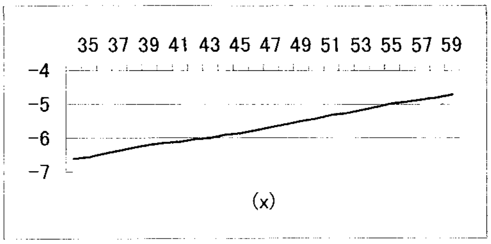
(8) G は，期中 $Xd_{\omega}(t)$ の最大値とする.

死亡保険金支払総額 $Xd_{\omega}(t)$ の最高額 G が一定以上であれば，償還額が減少し，一方，一定未満であれば，無リスク債券より高い利回りが得られるゼロクーポン債券である．これによって生命保険会社が保有する定期保険に関する死亡率の悪化によるリスクを資本市場に移転することができるのである.

この死亡リスク債券の不確実な部分が，期中死亡保険金支払総額のもととなる死亡数である．従って，死亡リスク債券の価格付けには，死亡数の確率過程モデルの定式化が問題となる．以下，すべての不確実性は，フィルトレーション $\{F_t : 0 \le t \le n\}$ を備わった確率空間 (Ω, F, P) により表現する．さらに，経過 t までの情報は，F_t により与え，また，F_t を条件とする確率測度 P の条件付期待値を $E\,[\cdot]$ と表すことにする．これらの条件に基づき，死亡数の確率過程モデルの定式化を行い，さらに，死亡リスク債券の価格を決めるストップロス再保険料が求めることにした.

3 死亡数の確率過程

この章では，死亡数の連続時間確率過程モデルを提案する．まず，簡易生命表により，1943 年生まれ，35 歳から 60 歳までの対数死亡率 $\ln q_x$（ここに，x は，年齢）をグラフで示すと，[図 1] のとおり線形に近い．もし，線形とみなせれば，対数死亡数の確率過程モデルがランダムウォークになる可能性がある．この点を踏まえて，死亡率の確率過程モデルを調査した結果，以下の参考となる先行研究があげられる.



[図 1] 1943 年生まれ，$\log q_x$

3.1 確率過程モデルの先行研究

3.1.1 Milevesky and Promislow[2001]の平均回帰ブラウニアン・ゴンパーツモデル

金利の期間構造モデルを死亡率に応用したモデルである．償還 T 時点のゼロクーポン債について，t 時点の無裁定理論価格 $V_t(T)$ は

$$V_t(T) = E_Q[\exp(-\int_t^T r_u du \mid F_t)] \qquad (3\text{-}1)$$

と表せる．ここに，r_u は，期間 u の無リスク金利，E_Q は，リスク中立確率による期待値関数である．このモデルを生存確率に応用して，t 時点で生存している条件での T 時点の生存確率を，

$$p_t(T) = E_Q[\exp(-\int_t^T h_u du \mid F_t)] \qquad (3\text{-}2)$$

と表した．ここに，

$$h_t = h_0 \exp(gt + \sigma Z_t), g, \sigma, h_0 > 0 \qquad (3\text{-}3)$$

$$dZ_t = -cZ_t dt + dB_t^h, Z_0 = 0, c \ge 0$$

B_t^h は，ブラウン運動過程である．このモデルが，平均回帰ブラウニアン・ゴンパーツモデルである．仮に，$c = 0$ であれば，指数分布型になる.

3.1.2 Gaurilov and Gavriova[2001]の生存率確率過程モデル.

機械の構造信頼性理論を用いていたモデルである．具体的には，ワイブルの法則を用いて，年齢 x の死力 $h(x)$ を

$$h(x) = \xi x^{\gamma} \quad (3\text{-}4)$$

と表した．ここに，$\xi, \gamma > 0$ とする．

従って，$h(x)$ に平均 0，分散 σ^2 の残差項 ε_x を加えれば，x 歳の時点で生存している条件での $x+T$ 歳時点の生存確率は，

$$p_x(T) = E\ [\exp(-\int_x^{x+T} h(u)du \mid F_t)] \quad (3\text{-}5)$$

として表すことができる．仮に，$\gamma = 0$ であれば，指数分布型になる．

3.1.3 Lee and Cater [1992]の死亡率確率過程モデル．

平均死亡率の対数を年齢と観察年度の 1 次結合として求めた指数分布型のモデルである．

$$\ln(m_{x,t}) = a_x + b_x k_t + \varepsilon_{x,t} \quad (3\text{-}6)$$

$$k_t = k_{t-1} + d + e(t) \quad (3\text{-}7)$$

ここに，$m_{x,t}$ は，年齢 x，観察年度 t の平均死亡率，k_t は，死亡率の変化指数，a_x, b_x は，年齢によるパラメータ（定数），$\varepsilon_{x,t}$ は，平均 0，分散 σ^2 の残差項，d は，定数項，$e(t)$ は，誤差項である．k_t は，ARIMA により求まった自己回帰過程であり，観察年度による死亡率の改善が大きいときに有効なモデルである．

Milevesky and Promislow[2001]と Gaurilov and Gavriova[2001]のモデルは，全年齢を対象としているため，複雑な式となっている．また，Lee and Cater [1992]のモデルは，観察年度による死亡率の改善が大きいことから，観察年度により死亡率の時系列分析を行っているが，昨今，死亡率の改善がおさまっており，観察年度ではなく，年齢による時系列分析の方が有効と判断できる．

本研究では，証券化の対象を生命保険会社が保有する短期の定期保険契約とし，その商品の保有層を考慮して，ウエイトの高い成人層を対象とした．従って，この限定した年齢による時系列分析に基づき，死亡数の確率過程モデルを求めた．また，離散時点で観測される標本から次のとおり，連続時間確率過程モデルを求めた．具体的には，時系列分析の標本を，1962-2003 年度簡易生命表男子 35-60 歳の死亡率とした．次に，同時出生死亡数（コーホート）に並び替えて，年齢による時系列分析を行った．35 歳 (ω) を時系列分析のスタート時点の年齢とし，その期首の同時出生生存数に対して，その後の経過 t 年度（離散時点）の死亡数 $D_\omega(t)$ を求め，この死亡数 $D_\omega(t)$ により時系列分析を行った．その結果，死亡数 $D_\omega(t)$ の対数差が，趨勢のあるランダムウォークに従うことがわかり簡単なモデルとなった．このプロセスについて，最新判明分 1943 年生まれの対数死亡数 $\ln D_\omega(t)$ で例示すると，以下のとおりである．

3.2 同時出生対数死亡数の到達年齢による時系列分析

3.2.1 モデルの同定

$\log D_\omega(t)$ を説明するために，自分自身の過去を説明変数とする回帰モデル

$$\ln D_\omega(t) = \mu_\omega + \phi_1 \ln D_\omega(t-1) + \phi_2 \ln D_\omega(t-2) + \phi_3 \ln D_\omega(t-3) + \cdot\cdot\cdot + \phi_f \ln D_\omega(t-f) + u_\omega(t) \quad (3\text{-}8)$$

を $AR(f)$ と記す．ここで，ϕ_i と μ_x はパラメータである．この次数 f を $SBIC$ によって決める．具体的には，推定式の誤差を表した $SBIC$ が最小となる次数を採択するのである．この結果，表 1 のとおり $AR(1)$ が最小のため，次数 1 を採択した．

表 1．同定

	μ_x	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	$SBIC$
$AR(1)$	0.0798	0.9987			-7.4892
$AR(2)$	0.1024	0.9742	0.0210		-7.3694
$AR(3)$	0.0623	1.0309	0.2192	-0.2520	-7.3046

従って，モデルは，

$$\ln D_\omega(t) = \mu_\omega + \phi_1 \ln D_\omega(t-1) + u_\omega(t) \quad (3\text{-}9)$$

となった．次に，もし，$\phi_1 = 1$ であれば，

$$\ln D_\omega(t) = \mu_\omega + \ln D_\omega(t-1) + u_\omega(t) \tag{3-10}$$

となり，趨勢をもつランダムウォークモデルの可能性がある．従って，$\phi_1 = 1$ の検定，すなわち，単位根検定を行う．

3.2.2 単位根検定

検定方法は，F 値タイプの検定である．具体的には，

(1) 帰無仮説

$$\ln D_\omega(t) = \mu_\omega + \ln D_\omega(t-1) + u_\omega(t)$$

(2) 対立仮説

$$\ln D_\omega(t) = \mu_\omega + \beta_1' t + \phi_1 \ln D_\omega(t-1) + u_\omega(t)$$

として，検定を行った結果，表 2 のとおり両側有意水準 5％で帰無仮説は，棄却されなかった．

表 2．単位根検定　F 値タイプのテスト

F 値統計量	臨界値 5%水準	臨界値 95%水準
1.41	1.08	7.24

従って，このモデルは，(3-10) 式になった．次に，(3-10) による推定結果との残差を算出し，このモデルが正しいかどうかの診断を行う．

3.2.3 モデルの診断

モデルの診断は，まず，残差系列を求め，その残差系列を用いて，系列的に独立か否かの統計的検定を行うものである．もし，このモデルが正しければ，残差系列は独立のはずである．検定方法は，*Ljung – Box* 検定である．具体的には，

(1) 帰無仮説　ラグ 5 までの残差系列が独立
(2) 対立仮説　ラグ 5 までの残差系列のなかで少なくとも 1 つは従属

として，検定を行った結果，表 3 のとおり，帰無仮説は，有意水準 5%で棄却されなかった．

表 3．残差自己相関の検定

Ljung – Box 統計量	臨界値 5%水準
4.10	11.07

診断の結果，(3-10) のモデルを採択した．以上により，死亡数 $D_\omega(t)$ の対数は，趨勢のあるランダムウォークと判断した．以下，改めてこのモデル式を示すと

$$\ln D_\omega(t) = \mu_\omega + \ln D_\omega(t-1) + u_\omega(t) \tag{3-10}$$

となる．ここに，x は，スタート時点の年齢，$D_\omega(0)$ は，所与とし，$u_\omega(t)$ は，互いに独立な正規分布 $N(0,\sigma_\omega^2 t)$ に従うとした．

(3-10) は，離散時点の標本から求めたモデルであるが，$D_\omega(t)$ を各会計年度における死亡数ではなく連続時間の中のある経過 t 時点での直近過去 1 年間，すなわち経過期間 [t-1, t] の死亡数とすることにより，予測死亡数 $D_\omega(t)$ の連続時間確率過程モデルを，幾何ブラウン運動過程

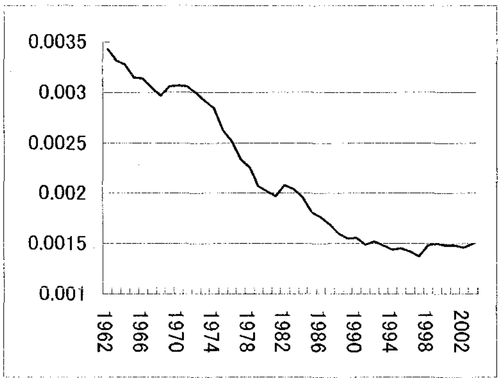
$$D_\omega(t) = D_\omega(0)\exp(y_\omega(t)) \tag{3-11}$$

と仮定した．

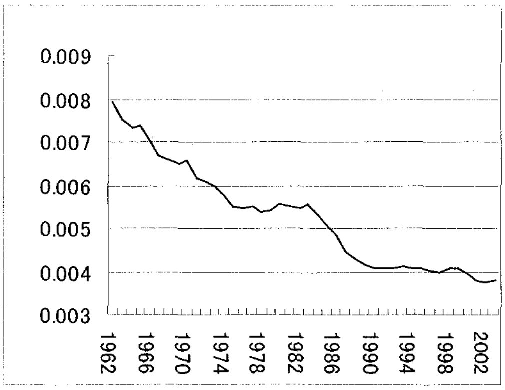
ここで，$y_\omega(t)$ は，互いに独立な正規分布 $N(\mu_\omega t, \sigma_\omega^2 t)$ に従う．なお，例示の係数 $\mu_\omega, \sigma_\omega$ は，それぞれ (0.0721, 0.0226) であった．なお，$y_\omega(t)$ が正規分布に従うため，理論的には，死亡数の合計が 0 時点の生存数を超える問題が発生する．ただ，今回想定した証券化は，短期の定期保険であり，また，高年齢を対象としていないため，その問題が発生する確率は，極めて小さく無視できる範囲内と考える．

次に (3-11) 式の係数 $\mu_\omega, \sigma_\omega$ について，出生年度間

の関係を分析する．これは，なるべく直近までの死亡率の改善状況をこの係数に反映させるためである．具体的には出生年度別に μ_{ω} を $\ln D_{\omega}(t)-\ln_{\omega} D(t-1)$ の平均値として求め，時系列分析を試みた．しかしながら，[図 2]，[図 3]のとおり，40 歳と 50 歳を例に見ると，概ね１０年前を転換点として，それ以前は，減少トレンドがあったが，直近１０年では，安定期に入っている．いわゆる「折れた状態」になっている可能性のためである．従って，通期では，正しい結果が得られないと判断した．また，最近１０年の数値だけでは標本数が少ないため，単位根検定もできない．従って，最近 10 年間の状況を参考に μ_{ω} は，出生年度により改善は見られないとし，ω のみの係数（定数）とした．また，σ_{ω}^{2} の出生年度との関係は，ホワイトの検定により，均一分散とした．以上により，予測死亡数 $D_{\omega}(t)$ の確率過程モデルが(3-11)式により定式化できた．なお，時系列分析は，山本[1999]，小暮[2000]，蓑谷[2001]を参照されたい．



［図 2］簡易生命表による 40 歳男子の死亡率推移表 (1962-2003)



［図 3］簡易生命表による 50 歳男子の死亡率推移表 (1962-2003)

4　死亡リスク債券の価格付け

この章では，死亡リスク債券の価格付けのモデルを導出する．具体的には，前章で求めた死亡数の連続時間確率過程モデルを用いて，死亡リスク債券の価格を決めるストップロス再保険の無裁定理論価格モデルを提案し，償還額を求める．死亡リスク債券が市場で評価されることを前提としているため，原資産である定期保険も市場に存在すると考える．

この原資産である定期保険は，$[t-1,t]$ にて観測される死亡に対して死亡保険金を支払うものであり，通常生命保険会社で扱っている定期保険ではない．いわば，「単位保険となる定期保険」である．この保険の純保険料 P^{t} を所与のものとし，リスク中立エッシャー変換（確率測度 P から確率測度 Q へ）のパラメータ θ を(3-11)を用いて，次式が成立するように求める．

$$\begin{aligned} P^{t} &= e^{-rt} E^{Q}[Xd_{\omega}(t)] \\ &= e^{-rt} E^{Q}[Xd_{\omega}(0)\exp(Y(t))] \end{aligned} \tag{4-1}$$

すなわち，定期保険を，不確実性を支配する幾何ブラウン運動過程の関数として与えられるようなペイオフ $Xd_{\omega}(t)$ を生み出す派生商品ととらえて，リスク中立エッシャー変換つまりリスク中立測度を求める．さらに，定期保険を原資産とする派生商品としてストップロス再保険をとらえると，ストップロス再保険の理論価格 π を計算することにつながるはずである．つまり時点 n において支払われるペイオフに対して

$$\pi = e^{-rn} E^{Q}[S] \tag{4-2}$$

となる．ここでは，死亡リスク債券が無裁定かつ完備市場で自由に売買できると仮定し，また，簡単化のため，コストは無視し，定期保険契約集団については，中途の解約契約はないものとした．

まず，(3-11)のモデル式を用いる．このモデル式の係数 $\mu'_{\omega}, \sigma'_{\omega}$ は，実際の死亡リスクの移転対象となる契約集団より求めることとする．これにより，支払死亡保険金総額の確率過程（確率測度 P）は，

$$Xd_{\omega}(t) = Xd_{\omega}(0)\exp(Y(t)) \tag{4-3}$$

となる．確率測度 P 上では $Y(t)$ は，$N(\mu'_{\omega}t, \sigma'^{2}_{\omega}t)$ に

従う．また，X，$d_{\omega}(0)$ は，所与とした．確率測度 P から Q への測度変換を，リスク中立エッシャー変換により行うと，エッシャー測度変換式

$$dQ = \frac{e^{\theta Y(t)}}{E\ [e^{\theta Y(t)}]} dP \qquad (4\text{-}4)$$

により，エッシャー変換分布のモーメント母関数は，

$$M(z,t\,|\,\theta) = \frac{E[e^{(z+\theta)Y(t)}]}{E[e^{\theta Y(t)}]}$$

$$= \exp\{(\mu'_{\omega} + \sigma'^{2}_{\omega}\theta)tz + \frac{1}{2}\sigma'^{2}_{\omega}z^{2}t\} \qquad (4\text{-}5)$$

となる．ここに，θ は，危険回避度にマイナスをつけたものである．従って，エッシャー変換による確率測度上では $Y(t)$ は，$N((\mu'_{\omega}+\sigma'^{2}_{\omega}\theta)t, \sigma'^{2}_{\omega}t)$ に従うこととなる．原資産として定期保険が資本市場で存在し，P^{t} が所与とすれば，θ が求まる．

以降本論文では，θ の特殊ケースとして，原資産の現在価値 P^{t} について，次の関係式が成立するような場合に考察を進めることにする．

$$P^{t} = Xd_{\omega}(0) \qquad (4\text{-}6)$$

ただし，この仮定にもとづくと，時点 t に関わらず定期保険の価値が等しくなることや，リスク回避的な価格付けとなっているかどうかが実際のデータに基づき検証される必要があるなど諸問題が存在するので，実務上応用する際には十分な妥当性検証が必要である．これらの課題・問題については将来の研究課題としたい．

(4-6)を(4-1)に代入し，$Xd_{\omega}(0)$ で除して，(4-3)式から

$$E^{Q}[e^{Y(t)}] = e^{rt} \qquad (4\text{-}7)$$

となり，(4-5) 式を $z=1$ として (4-7) 式に代入すると

$$\exp(\mu'_{\omega}t + \theta\sigma'^{2}_{\omega}t + \frac{1}{2}\sigma'^{2}_{\omega}t) = \exp(rt) \qquad (4\text{-}8)$$

から

$$\mu'_{\omega}t + \theta\sigma'^{2}_{\omega}t = rt - \frac{1}{2}\sigma'^{2}_{\omega}t \qquad (4\text{-}9)$$

となる．従って，無裁定価格理論を導入するために，リスク中立化をすると，(4-6)の仮定のもとで，確率測度 Q 上では $Y(t)$ は，$N((r-\frac{1}{2}\sigma'^{2}_{\omega})t, \sigma'^{2}_{\omega}t)$ に従うことになる．リスク中立測度変換については，Neftci[1996]，Gerber and Shiu [1994]を参照されたい．

確率測度 Q のもとで，定期保険の派生資産であるストップロス再保険の無裁定理論価格 π および，償還額 B を求める．ストップロス再保険の無裁定理論価格 π は，ヨーロピアン・フィックスド・ストライク・ルックバック・コール・オプション[2]の価格式により求める．従って，死亡数が幾何ブラウン運動過程に従うとし，n 年間で会計年度ではなく，観測される連続的な時間 t 時点における過去 1 年間の死亡数から計算される死亡保険金支払額の最大値に対するストップロス再保険について，その無裁定かつ完備市場におけるストップロス再保険料の無裁定理論価格 π は，

$$\pi = e^{-rn}E^{Q}[S]$$

$$= \frac{A}{\beta-\alpha}e^{-rn}\{E^{Q}[\max(G-\alpha,0)] - E^{Q}[\max(G-\beta,0)]\}$$

$$= \frac{A}{\beta-\alpha}\Big[\ Xd_{\omega}(0)\Phi\Big(\frac{\ln\frac{Xd_{\omega}(0)}{\alpha} + (r+\frac{1}{2}\sigma'^{2}_{\omega})n}{\sigma'_{\omega}\sqrt{n}}\Big)$$

$$-\alpha e^{-rn}\Phi\Big(\frac{\ln\frac{Xd_{\omega}(0)}{\alpha} + (r-\frac{1}{2}\sigma'^{2}_{\omega})n}{\sigma'_{\omega}\sqrt{n}}\Big)$$

---

2 ヨーロピアン・フィックスド・ストライク・ルックバック・コール・オプションとは，契約期間中における原資産価格の最大値が行使価格を超えた場合に満期時点でその超過額を得るオプション契約である．詳細は，藤田[2002],Gerber and Shiu[2003]を参照のこと．

$$+\frac{Xd_{\omega}(0)\sigma_{\omega}^{'2}}{2r}\left(\Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{Xd_{\omega}(0)}{\alpha}+(r+\frac{1}{2}\sigma_{\omega}^{'2})n\right.}{\sigma_{\omega}^{'}\sqrt{n}}\right)\right.$$

$$-e^{-rn}\left(\frac{\alpha}{Xd_{\omega}(0)}\right)^{\frac{2r}{\sigma_{x}^{'2}}}\Phi\left(\frac{\ln\frac{Xd_{\omega}(0)}{\alpha}-(r-\frac{1}{2}\sigma_{\omega}^{'2})n}{\sigma_{\omega}^{'}\sqrt{n}}\right)\Bigg)$$

$$-Xd_{\omega}(0)\Phi\left(\frac{\ln\frac{Xd_{\omega}(0)}{\beta}+(r+\frac{1}{2}\sigma_{\omega}^{'2})n}{\sigma_{\omega}^{'}\sqrt{n}}\right)$$

$$+\beta e^{-rn}\Phi\left(\frac{\ln\frac{Xd_{\omega}(0)}{\beta}+(r-\frac{1}{2}\sigma_{\omega}^{'2})n}{\sigma_{\omega}^{'}\sqrt{n}}\right)$$

$$-\frac{Xd_{\omega}(0)\sigma_{\omega}^{'2}}{2r}\left(\Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{Xd_{\omega}(0)}{\beta}+(r+\frac{1}{2}\sigma_{\omega}^{'2})n\right.}{\sigma_{\omega}^{'}\sqrt{n}}\right)\right.$$

$$-e^{-rn}\left(\frac{\beta}{Xd_{\omega}(0)}\right)^{\frac{2r}{\sigma_{\omega}^{'2}}}\Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{X_{\omega}d(0)}{\beta}-(r-\frac{1}{2}\sigma_{\omega}^{'2})n\right.}{\sigma_{\omega}^{'}\sqrt{n}}\right)\Bigg)\Bigg] \quad (4\text{-}10)$$

として与えられる．ここに，Φ は，標準正規分布の分布関数を表す．これにより，死亡リスク債券の償還額 B は，(2-1)式に求まられた π を代入することで与えられる．

具体的に，(4-10)式により，ストップロス再保険の価格の試算値を以下に示す．前提は，残存保険期間5年男子の定期保険集団を証券化する．また，使用データは，1人当たりの死亡保険金 X 1000 万円．$d_{\omega}(0)$ は，2003年度簡易生命表の男子死亡率による．無リスク金利 r は，0.0755%(2004年12月28日現在の3ヶ月金利)，0.5%と1%．α は，$Xd_{\omega}(0)$ の110%．β は，$Xd_{\omega}(0)$ の130%とした．その結果の一人当たりストップロス再保険価格の試算値および対象契約の規模による $\sigma_{\omega}^{'}$ と金利 r による感応度は，表4のとおりである．定期保険を保有している生命保険会社がその契約量の規模から大数の法則が働かないために生じる死亡リスクをヘッジするためのストップロス再保険の価格は，この商品特性から，年齢および金利変化より $\sigma_{\omega}^{'}$ の変化に大きく影響する．つまり，契約量が小さければそれだけ $\sigma_{\omega}^{'}$ が大きくなり，価格がその分増加することを表4は示している．したがって，実務に応用する際は，$\sigma_{\omega}^{'}$ について，実際のデータに基づき十分な妥当性検証が必要である．

表4．ストップロス再保険価格の試算値と感応度テスト

$r=0.0755\%$ (3ヶ月CD金利)　　単位：円

$\sigma_{\omega}^{'}$ \ ω	35	40	45	50
2.26% [3]	14	20	31	49
5%	252	362	575	899
10%	754	1,080	1,715	2,684

$r=0.5\%$

$\sigma_{\omega}^{'}$ \ ω	35	40	45	50
2.26%	32	46	73	114
5%	314	450	717	1,122
10%	795	1,139	1,810	2,834

$r=1\%$

$\sigma_{\omega}^{'}$ \ ω	35	40	45	50
2.26%	75	108	171	268
5%	399	571	907	1,421
10%	841	1,204	1,914	2,998

5 結論と今後の課題

生命保険の証券化は，生命保険会社の死亡リスクを死亡リスク債券として資本市場に移転するもので

3 例示の係数を使用した．

ある．従って，この債券は，今後，証券化が進むにつれて，資本市場がこの価格を形成し，無裁定理論価格に近づくことが予想される．この点を踏まえて，生命保険の証券化を研究した．

その結果，

(1) 証券化の対象を生命保険会社が保有する短期の定期保険契約とし，その商品の保有層を考慮して，ウエイトの高い成人層を対象とした．従って，この限定した年齢による時系列分析に基づき，死亡数の確率過程モデルを求めた結果，幾何ブラウン運動過程と見なした．これは，先行した研究の Milevesky and Promislow[2001]，Gaurilov and Gavriova[2001]および，Lee and Cater [1992]の確率過程モデルよりも簡単なモデルとなり，実務において有効なものとなった．

(2)つぎに，この死亡数の確率過程を用いて，リスク中立エッシャー変換によりストップロス再保険の無裁定理論価格モデルをヨーロピアン・フィックスド・ストライク・ルックバック・コール・オプションの価格式を用いて提案した．

今回は，被保険者年齢を特定し,また,保険期間も短期として,定期保険を対象とした死亡リスク債券について,．研究した．しかし，生命保険会社は，幅広い年齢と終身保険など長期保険期間の生命保険も保有している．従って，これに対する死亡リスク債券の価格モデルは，今後の研究課題としたい．

参考文献：

小暮厚之[2000]，『ファイナンスへの計量分析』，朝倉書店．

藤田岳彦[2002]，『ファイナンスの確率解析入門』，講談社．

蓑谷千凰彦[2001]，『金融データの統計分析』，東洋経済新報社．

山本拓[1999]，『経済の時系列分析』，創文社

Cummins.J.D.[2004], "Securitization of Life Insurance Assets and Liabilities", *TIAA-CRAF Institute The Wharton School*

Gaurilov,L.A.and Gavriova, N. [2001], "The Reliability theory of Aging and Longevity", *J. theor. Biol. 213, 527-545 Academic Press*

Gerber,H.U.and Shiu,E.S.W. [1994], "Option Pricing By Esscher Transforms", *Transactions of the Society of Actuaries* 66 99-140

Gerber,H.U.and Shiu,E.S.W. [2003], "Pricing Lookback Options and Dynamic Guarantees", *North American Actuarial Journal, Volume 7,Number 1* 48-67

Lee, R. D and Carter, L. R. [1992], "Modeling and Forecasting U. S. Mortality", *Journal of the American Statistical Association, Vol. 87, No. 419, 659-671*

Lin,Y., and Cox,S.H. [2004], "Securitization of Mortality risks in life annuities ", *Working paper, Georgia State University*

Milevsky.M.A, and Promislow, S.D. [2001], "Mortality derivatives and the option to annuitise", *Insurance: Mathematics and Economics 29 299-318*

Neftci,S.N. [1996], "An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives ", *ACADEMIC PRESS*

Wang,S.S. [1995], "Insurance Pricing and increased Limits Ratemaking by Proportional Hazards Transforms", *Insurance:Mathematics and Economics, 17, 43-54*

Wang,S.S. [2000], "A Class of distortion operations for pricing and insurance risks", *Journal of Risk and Insurance 67, 15-36*

Securitization of Life Insurance Policy and Its Pricing

Shigeru Kojima

Tokio Marine & Nichido Financial Life Insurance Co.,Ltd.
Hiroo Plaza,5-6-6 Hiroo,Shibuya-ku,Tokyo 150-0012,Japan
Tel:03-5488-1417.
E-mail:shigeru.kojima@tmn-financail.co.jp

Abstract

This paper deals with securitization to transfer mortality risk from Life Insurance Company to the capital market and with the new pricing models on Mortality Risk Bonds. Referencing to mortality risk securitization done by Swiss Re in December of 2003, the author proposes the securitization model and the Arbitrage-Free Pricing model of Stop-loss Reinsurance(as derivative asset of Term Insurance as underlying asset), which determines price of mortality risk bonds. They are based on the developed a formula using stochastic process that cause the mortality and the option theorem.