講　演

金融リスクの計量化　理論と実際

東京大学大学院数理科学研究科教授　楠岡　成雄

日本アクチュアリー会年次大会　特別講演

平成 26 年 11 月 6 日　経団連会館

（本稿は日本アクチュアリー会年次大会特別講演の記録に、日本保険年金リスク学会会長講演（平成 26 年 11 月 1 日）の内容を加味して加筆修正されたものです）

ただいまご紹介にあずかりました楠岡でございます。

最初に、私事に属することかもしれませんが、近年、大学においてアクチュアリー教育というものが非常に盛んになってまいりました。各大学の数学教室においてアクチュアリー教育というものがなされております。しかし、大学の中にアクチュアリー教育がしっかりできる人はほとんどおりませんので、多くのアクチュアリーの方に、東京大学をはじめいろいろな大学で講義をしていただいております。私は大学の数学の代表でも何でもありませんが、私自身が東京大学でアクチュアリーに関する教育を始めたときに、日本アクチュアリー会より講師の方々を紹介していただきましたので、この場をかりて、高いところからで恐縮ですが、お礼を申し上げます。

さて、私は金融リスクの計量化に関する研究をもう十数年前からやっておりますが、これは非常に重要な問題でありながら、なかなか話が進みません。金融リスクの計量化については、非常にはっきりとリスクの計量化ということを最初に述べたのは、マルコビッツ氏かなと思います。この場合はポートフォリオの収益率の平均と分散を考え、分散をもってリスクと捉えるという考え方でした。ただ、これはどちらかというと投資理論であります。もう少しリスクの計量化というものについて踏み込んで考えた最初のものは何かと調べましたところ、ビュールマン氏の 1970 年のリスク理論の有名な本［2］の中で述べられている Premium calculation principle が最初のもののようです。1980 年にガーバーという方も本［3］で同じようなことを書かれているようですが、残念ながら、ガーバー氏の本は東京大学の図書館にはありませんので、いまだにこの本に目を通したことがありません。

リスクの計量化

Markowitz ポートフォリオ理論
収益率の 平均 と 分散

保険

Bühlman (1970), Gerber (1980)

Premium calculation priciple
S : accumulated claims of risk
a) Expected value principle : $(1+\lambda)E[S]$
b) Standard deviation principle : $E[S]+\alpha\sigma[S]$
c) Variance principle : $E[S]+\beta\sigma^2[S]$
d) Principle of zero utility: P : $E[u(P-S)]=u(0)$

1

さて、ビュールマン氏は次のようなことを書いています。S は accumulated claims of risk で、ここでは当然のように確率変数であると考えています。S の期待値が、当然取るべき保険料、純保険料ですけれども、それに加えて、リスクの発生に備えて、どれぐらい上乗せするべきかということが論じられています。これらのことについてはアクチュアリー会の発行している昔の生命保険の教科書の中にも書かれていました。a）Expected value principle として期待値に定数倍を上乗せするというやり方、b）Standard deviation principle として標準偏差の定数倍を上乗せするやり方、c）Variance principle として、分散の定数倍を上乗せするやり方などが示されています。最後に d）Principle of zero utility という方法が述べられていますが、これは何か効用関数 u を一つ決めて、リスク S を保険料 P で引き受けたときに、その効用の期待値が何もしないゼロの効用 u(0）に等しくなるように保険料 P を決めるという方法です。これらが調べた限りでは、マルコビッツ氏の分散を除いて最も古いリスクの計量化の考え方かなと思います。a)、b)、c）は何となく適当に決めたという感じがあり、定数をどう決めるか等、いろいろな問題が起こりますので、d）が最も根拠がはっきりしているとビュールマン氏の本では述べられているように思います。

このような考え方は古くからあったわけですが、リスクの計量化というものが強く意識されるようになったのは、ご存じのように、金融規制が特に銀行に対して行われるようになってからかと思います。バーゼル、バーゼルⅡ、バーゼルⅢに代表される考え方で、基本的にはリスクに備えて積むべき資本は幾らかという観点でリスクを計量化するという考え方です。リスクは曖昧な概念ですが、それに対して資本は、日本ですと円、何円という言い方になりますので、余り曖昧にはできないわけですね。ですから、相当しっかりとした計算式が必要になってくる。ビュールマン氏などのリスクプレミアムの考え方もそれに近いわけです。生命保険においては、責任準備金などは平均、純保険料もそうですが、とにかく平均により与えられる概念があり、平均は、当然これを下回れば絶対何か将来おかしくなるというわけですので、最低限必要な資本ですけれども、それにどれぐらい上乗せすべきかというふうにリスクプレミアムは考えられていますので、言って

みれば、この点ではアクチュアリー学が先行していた。アクチュアリーの世界では、私も余り正確には理解していませんが、Esscher risk measureとか、Yaari-Wang risk measureなど、いろいろなリスク尺度が提案されているわけですね。

一方ファイナンスは、元々はブラック・ショールズ・マートン理論のように、リスクを完全にヘッジしようという考え方からスタートしております。リスクを完全にヘッジできればリスクの計量化のような問題は起こらないわけですけれども、リスクが完全にヘッジできない状況は幾らでもある。実務的には当然のことですが、リスクが完全にヘッジできないとすると、そのリスクというものをどのように捉え、どう対処するべきかという話になってくる。元々アクチュアリー学が先行して、ビュールマン氏がやっていたわけなので、1990年代後半になりますと、ファイナンス・アンド・アクチュアリーという名称の研究集会がヨーロッパで盛んに開かれております。よく考えてみると、ファイナンスやアクチュアリー学などというようなことは、突き詰めればリスク管理ということになってしまうわけです。リスク管理を、ファイナンスの場合はデリバティブというようなことから出発し、アクチュアリー学の方は全く違うところから出発したわけです。ファイナンスでは、要するに完全にリスクを消すことを考えたけれども、やはりそれは実際にはできない。アクチュアリー学の方は元々そのようなことはできないよというところから出発しているので、それがだんだん融合して来ているという印象を持ちます。

さて、金融リスクの計量化の考え方というものは本来いろいろあり得ると私は思っております。マルコビッツ氏のポートフォリオの収益率の分散というものは少し大ざっぱ過ぎる考え方ですが、リスクプレミアムや金融規制の考えは、基本的にはリスクに対して必要な資本を計算して積みなさいということです。これは一つの考え方です。これ以外にもリスク管理の手段はあると思うのですけれども、現在は今言った考え方の流れで数理的な研究が進んでおります。これは今日ではmeasure of risk, risk measureという言葉で呼ばれており、日本語ではリスク尺度と呼んでいますが、これについての数学的な理論研究が非常に進んでおります。日本では余り研究は盛んではないのですが、ヨーロッパではものすごい数の論文が出ております。ヨーロッパにおいては、博士課程の学生がファイナンスに関する博士論文を書くときにこれほどいい材料はないということで、次から次へと論文が出ていて、私も簡単には読めないような大変難しい論文も多数出ております。

非常に精密な研究は進んだのですけれども、一方において、リスク尺度に基づくリスク管理がリーマン・ショックにおいては余り効力を発揮しなかったと私は感じております。ですから、リスク尺度の研究者として、リーマン・ショックを経験して、どこで間違えたのかということを考えるようになりました。ヨーロッパでも、そのようなことを考えている人はいますが、余り真剣に捉えていない人の方が多いような感じがいたします。何が間違っていたのかということを考えるときに、理論のみならず、実際にそれを適用するときに、どのようなことになるのかということまで目を配らないといけないのではないかと思っております。私は、ある金融機関で実際にどのようにリスク管理を行っているか話を聞く機会がたまたまありましたが、今から考え直してみると、リーマン・ショックのようなことが起こっても、しようがないのかなと考えるようになりました。本日はそのようなことについてもお話し致します。

先ほど、レジュメを見た人から、数式ばかりではないですかと言われたのですが、リスク尺度の研究その

ものがやはり数学的な観点から進んでいきましたので、リスク尺度の考え方・前提条件などを明らかにするため、まず1期間モデルの下で、かなり詳しく数学的なことを含めて述べたいと思います。さらに、深くは触れないつもりですけれども、多期間モデルに対する研究に付随して、条件つきリスク尺度という概念が、10年以上前から出てきておりますので、これについても述べます。最後に、実はこのようなリスク尺度の概念と実務での運用にはかなり乖離があるということをお話ししたいと思います。東京大学ではアクチュアリーの方々に様々な話題について講義をしていただき、私もしばしば聴講させて頂きました。その中で国際会計基準や国際的なアクチュアリー会計制度が現在検討されており、その中でファイナンス的な考え方をかなり取り入れてリスク管理を行おうとしていると理解しました。私自身は、このような考えには、少し危ういところがあると感じております。ファイナンス理論をきちんと使えなどと言うことは簡単ですが、実際にどのように運用されるかを考えないと、非常に危険なことも起こり得ます。金融機関におけるリスクの計算の実態と理論研究の想定とはかなりずれがあるのではないかということを感じておりまして、今日はそのようなお話もさせていただきたいと思います。

それでは、数式がどんどんふえてくるなど、数学の講義のようにお感じになるかもしれませんが、あらかじめご容赦下さい。このような研究は、数学的にこういう問題だと定式化してしまうと、半分議論が終わっているところがあります。数学的定式化の中に既に問題があったりもするわけですので、どのような考え・前提のもとで、このような定式化をしたかということもお話ししないと、真の議論や批判が出来ないと考えるからです。今日、朝から講演を聞かせていただいておりまして、この講演は随分と違う講演になると思うのですけれども、我慢して聞いていただければと思います。

基本的な考え方をはっきりさせたいので、まず1期間モデルを考えます。すなわち、時刻というものは二つしかない。現在と将来の二つです。金利などは後で処理することにして、とりあえず金利はゼロと考えます。そのもとでリスクの計量化というものはどのようにやるのかという考え方をはっきりさせようと思います。

リスク尺度　1期間モデル：時刻　現在、将来の２つ　（金利ゼロとする）

これから起きうるシナリオの全体：既知

将来における会社資産状況は　シナリオが与えられれば　一意に決まる

シナリオの集合: Ω 事象の集合と考えれば

将来における会社資産状況 $X =$ 資産 $-$ 負債　は　確率変数となる

（「政策」を変えれば X も変化する）

必要な資本 $\phi(X)$

リスク尺度：確率変数 X に対して、実数 $\phi(X)$ を対応させるもの

考慮すべき確率変数の集合： $\mathcal{X}$　とおく

$\rho : \mathcal{X} \to \mathbf{R}$　写像

公理主義的アプローチ

用語・記法は Föllmer-Scheid に従う

2

まず、起こり得る全てのイベント、例えば突然明日１ドルが500円になるなど、そのようなものを込めて起こりうる全てのシナリオを考えます。そして、それが本当に時系列的に発生するシナリオ、場合によっては秒単位で変化していく状況など、そのようなものまで込めて全部のシナリオを考える。ですから、とてつもなく巨大な数のシナリオとなりますが、とにかく起こり得るシナリオは一応すべて知っていると考えます。ですので、ここではまずシナリオの全体というものを規定してしまいます。実は、ここに既に問題があります。それは、今日、午前の講演で出てきたunknown unknownと呼ばれるもの、例えば明日ゴジラがあらわれて家を潰して回るといったシナリオは一切入っていないことになります。そこまで考える人はいないと思います。想定外の状況はそもそもシナリオの中に組み込むことは難しいということですね。ですから、起こりうるシナリオ全体をまず決めてしまっているということにより問題が発生する可能性があるということを申し上げておきます。

さらに今、会社の純資産状況とここでは述べることにしますが、純資産状況＝資産－負債という大ざっぱな概念を考えます。純資産状況という適当な言葉を使いましたけれども、それを実際に計算するとなると、非常に細かく会社の資産や負債がそれぞれ何円の価値であるかを判断して積み上げて、ようやくわかるわけで、実際はかなり曖昧なものです。しかし今は単純に会社の純資産状況が何円であるか計算可能と考えていただきたいと思います。そして、シナリオが一つ与えられれば、そのシナリオが起こった場合の将来の時点での会社の純資産状況は一通りに決まり計算可能と考えます。そう単純ではないと思われるかもしれませんが、今は考え方の根本を見るために、こう決めつけてしまいます。実際は、われわれは、ポートフォリオを組んだとしても、翌日何か起きればポートフォリオをそのままにしておくことはないので、起こったシナリオに対して当然反応していきますが、ただ、今は１期間モデルを考えているということで、ポートフォリオを途中で変えることはできないとします。その上でリスクをどのように捉えるかということを考えていきます。

シナリオの種類は十分豊富で、それで完全に全ての起こりうる状況をあらわすことはできると考えるということを申しました。そのシナリオの集合をなぜかΩとおきます。だんだん嫌な感じがしてくると思いますが、このΩを事象の集合と考えれば、将来の会社の純資産状況＝資産－負債はΩの要素であるシナリオを与えれば１通りに決まるので、Ωの上の関数、すなわち確率変数になる。後で詳しく述べますけれども、確率変数と言いながら、確率はここではまだ入っていません。そして将来の会社の純資産状況をXと書くことにします。XはΩ上で定義された関数、確率変数です。このような記号を見ただけで「もうやめた」と感じる方がいるかもしれないが、もうしばらくおつき合いください。

もちろん現在の時点で資産の組みかえを行えば、将来の純資産状況である確率変数Xは別の確率変数に変わってしまいます。ですから、あくまで、ポートフォリオを決めたとして、将来の時点に何が起こるかということをXが表しているということです。このXの値はシナリオに応じて決まってくるわけですが、これに対してリスクというものをどう考えるか。積むべき資本という考え方からは次のようになります。将来の純資産状況を表す確率変数Xが与えられたときに、現在時点で積むべき必要な資本の量という形でリスクを計量化することを考え、それが$\rho(X)$という値になると考えます。このρをリスク尺度と呼ぼうと考えます。そうしますと、ρとは何か、すなわちリスク尺度とは何かというと、確率変数Xに対して実数$\rho(X)$を対応させる、そのような対応関係がリスク尺度だと考えられるわけです。そこで、考慮すべき確率変数X

の全体、すなわち純資産状況として考え得る全ての確率変数の集合をχ（スクリプト X）という形で書くことにします。そうすると、リスク尺度ρは、χの要素である確率変数 X を与えると、それを実数に対応させる関数だということになります。このようにまず捉える。ここで既に、リスクの計量化の考え方としては強い制約が加わっているということにご注意ください。こういった定式化でよいのかという疑問は当然起こりますが、本日は、現在のリスク尺度に対する主流派の考え方を明らかにしたいので、これを認めた上で話を進めます。

最も重要な問題は、どのようなリスク尺度を選ぶのがいいかということです。一つのやり方として、特定のリスク尺度を取り上げ、これが理想的だと説明していくという方法もありますが、現在の研究の考え方は違う立場を取ります。そこではリスク尺度ρが満たすべき好ましい性質としてどのようなものがあるかを列挙して考えていきます。リスク尺度の望むべき性質をあげていき、それらを満たすリスク尺度として何が残るかというような考え方でいきます。これは公理主義的なアプローチであって、例えばρとはこうでなければいけないという公理系を与えると、そこからどのような定理が生まれるかという考え方で、皆さんが昔、初等幾何で習ったような話になるわけです。さて、今回の講演にあたりファイナンス・アクチュアリー関係のいくつかの文献を調べてみました。すると分野や研究者により、同じ概念に別の用語を用いていることに気づきました。記号も全く違います。ですから、用語を出来るだけ統一するために主にフェルマー・シード[4]の言葉遣いを用いていきます。ただ、フェルマー・シードも、変な記号を使っているので、それはまともな記号に変えてあります。このフェルマーとシードの本［4］はスタンダードな教科書としてヨーロッパでは有名です。また、フェルマーという方はドイツ人らしく真剣にいろいろなことを考えておられるので、彼の考え方に沿って説明していきます。

Ωの要素の数が無限大である場合は可測性といった概念を考えねばなりませんが、今日はそのような数学的概念にはできるだけ立ち入らないようにします。ですから、今はとりあえず、われわれが考える純資産状況を表す確率変数 X として考え得るものの全体であるχは有界な確率変数全体であるとします。有界という意味は、上限と下限が有限となるという意味です。ですから、青天井の契約というものは、ややこしい話になってまいりますので、そのようなものはここでは考えないこととします。

[必須条件]

（単調性）[monotonicity]

$X, Y \in \mathcal{X},\, X(\omega) \leqq Y(\omega),\, \omega \in \Omega \Rightarrow \rho(X) \geqq \rho(Y)$

広義のリスク尺度：仮定するのはこれのみ

（キャッシュ不変性）[cash invariance]

$X \in \mathcal{X},\, m \in \mathbf{R}$ 実数 $\Rightarrow \rho(X+m) = \rho(X) - m$

（正規化条件）[normalization] $\rho(0) = 0$

単調性、キャッシュ不変性、正規化条件を満たすものを
（貨幣的）リスク尺度 [monetary measure of risk] と呼ぶ

3

ρ というものがリスク尺度であるためにどのような条件が必要かを考えていきます。X と Y が将来の純資産状況をあらわすとし、どのシナリオを取っても、X より Y の方がいいとする。そうすると、何が起きても Y の方が X よりいいに決まっているので、積むべき資本を考えると、X に対して積むべき資本の方が Y に対して積むべき資本より大きいに決まっているだろう。ですから、不等号が引っ繰り返りますが、このような条件を単調性と呼び、リスク尺度の必須条件として課します。

次に、キャッシュ不変性という条件です。これはどのようなことかと申しますと、今、確率変数 X という将来の純資産状況に対して X + m（m は定数です）という将来の純資産状況を考えます。すると、純資産状況 X に対して、会社資産状況 X + m は、何が起きても、ただ m だけが多くなるということになります。そうすると、積むべき資本は、今、金利はゼロと考えていますので、m だけ少ないであろう。このような性質をキャッシュ不変性と呼びます。

最後に、これは大した条件ではありませんが、X= 0 の時は ρ（X）＝0 とする。要するに何も起きないのであれば、備える必要はないでしょうという意味で、ρ（0）＝0 とする。これは正規化条件と呼ばれます。今述べました単調性、キャッシュ不変性、正規化条件の三つの条件を満たすものを、フェルマーは貨幣的リスク尺度と呼んでおります。ただ、多くの文献では、この 3 つの条件を満たすものを単にリスク尺度と呼んでいる文献も多いようです。

ここまでは、まあ、そうかなという性質ですけれども、ここから少しいろいろな性質を考えていきます。

その他の条件

（凸性）[convexity]

$X, Y \in \mathcal{X},\ 0 \leqq \lambda \leqq 1 \Rightarrow$

$$\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leqq \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y)$$

（凸性）を満たすと ($Y = 0$ とおけば)

$$\rho(\lambda X) \leqq \lambda\rho(X), \qquad 0 \leqq \lambda \leqq 1$$

$$\rho(\lambda X) \geqq \lambda\rho(X), \qquad \lambda \geqq 1$$

4

まず凸性という条件です。X と Y は将来の純資産状況であるとします。今 λ というものは 0 と 1 の間の定数とし、将来の純資産状況が λ X +(1 − λ）Y になるようなものを考えます。この時、λ X +(1 − λ）Y に対して積むべき資本が、λ×(X に対して積むべき資産)+(1 − λ)×(Y に対して積むべき資産）以下となるということが凸性です。凸性という条件がどのような意味を持つのかということは、私はよくわかりません。実は凸性のようなものがあると数学的には解析しやすいので考えているというようなところもあると思います。もし何か凸性という性質をリスク尺度に課すべき理由を思いつかれる方がおられましたら、ぜひ理由を教えてほしいと思います。

凸性を満たすと仮定します。Y = 0 と置きますと、ρ(0) = 0 ですから、λ がゼロと 1 の間のていすうであると定数でにあるときは、ρ(λ X）よりも λ ρ(X）の方が大きいか等しいことになります。λ が 1 以上の定数のときは、これは若干の計算で、逆の不等号のが成り立ちます。それに対して、いや、もういっそのこと、X に対して λ が非負定数ならば、λ X に対して積むべき資本 ρ(λ X）はちょうど ρ(X）の λ 倍であるとしよう。これが正同次性と呼ばれる条件です。

（正同次性）[positive homogeneity]

$X \in \mathcal{X},\, \lambda \geqq 0 \Rightarrow \rho(\lambda X) = \lambda\rho(X)$

（劣加法性）[subadditivity]

$X, Y \in \mathcal{X} \Rightarrow \rho(X+Y) \leqq \rho(X) + \rho(Y)$

（凸性）＋（正同次性）　$\Longleftrightarrow$　（劣加法性）＋（正同次性）

（コヒーレントなリスク尺度）[coherent measure of risk]

（凸性）、（正同次性）を持つ貨幣的リスク尺度

Artzner-Delbaen-Eber-Heath

（凸リスク尺度）[convex measure of risk]

（凸性）を持つ貨幣的リスク尺度

Heath, Ku, Föllmer-Scheid, ...

5

それから、劣加法性。これは、X と Y というものがあったときに、ρ（X ＋ Y）よりもρ（X）＋ρ（Y）の方が大きいか等しいとする条件です。劣加法性はあった方がいいのではないかという主張はあります。例えばリスクを管理するときに、もし二つの部門で別個にリスクを管理したとします。そうして、ある部門では将来資産が X となる計画を採用する。別の部門では、将来資産が Y となる計画を採ると、会社全体としては将来資産が X ＋ Y になるわけです。例えばρ（X）が非正、要するにゼロ以下であれば、資本を積む必要がないわけですから、一応資本を積むことなく計画を実行して構わない。ρ（Y）も非正だとしましょう。もし、ρ（X）もρ（Y）も非正なのに、ρ（X ＋ Y）が正になってしまうということが起こると、それはまずいだろう。何故ならば、各部門でリスクを計って資本を積まなくてよい計画を策定したのに、会社全体では資本を積まねばならないということが起こりえることになり、それぞれの部門が主体的に動きにくくなるからです。ですから、劣加法性というものはそれなりに合理性があるように思います。ただ、凸性と正同次性を両方仮定すると、それは劣加法性と正同次性を両方仮定することと同等だということが数学的に簡単に証明できます。

歴史的には、まずコヒーレントなリスク尺度という言葉が出てまいりました。コヒーレントという言葉は、なかなか誰もうまく訳せなくて、辞書を見ても、なかなかよくわからない。まあ、「問題ない」というぐらいの感じですか。なんとも不思議な言葉なのですが、アルツナーらが［1］で凸性と正同次性を持つ貨幣的リスク尺度のことをコヒーレントなリスク尺度と呼んで、このようなリスク尺度がいいのだと推奨したわけです。それに対して「いや、ちょっと弱めましょう」と考えた人たちがおりました。すなわち、凸性と正同次性のうちの正同次性をなくして、凸性だけを持つものを考えましょうと。これは凸リスク尺度と呼ばれており、ヒースやフェルマー・シードなど、いろいろな人たちが、考察しています。

数学的蛇足

$\mathcal{A}_\rho$ リスク尺度 ρ の下で許容できる $X \in \mathcal{X}$

$$\mathcal{A}_\rho = \{X \in \mathcal{X};\ \rho(X) \leqq 0\}$$

ρ が凸性を持てば凸集合となる　：　数学的に扱いやすい

コヒーレントリスク尺度の特徴付け

P ： $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率測度とする

$\mathcal{M}_1(P)$ ： $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の P に絶対連続な確率測度の全体

ρ がコヒーレントリスク尺度で、(P-Fatou 性) をもつ

$\Rightarrow$　$\mathcal{M}_1(P)$ の部分集合 $\mathcal{Q}$ が存在して

$$\rho(X) = \sup\{E^Q[-X];\ Q \in \mathcal{Q}\}$$

凸リスク尺度に対しても同じような特徴付けがある

6

数学的蛇足でございますけれども、凸性とはどのようなことかというと、今、ρ(X）が非正である（資本を積まなくてもいい）X 全体の集合を考えると、ρが凸性を持てば、この集合は凸集合になります。凸集合は数学的に非常に取り扱いやすいという事実があります。凸性を仮定しないと、解析が進まないので、多くの場合凸性が仮定されるということです。

それから、コヒーレントなリスク尺度については、次のような性質があります。数学的に正確に述べることは難しいので、少しごまかしますが、ρがコヒーレントリスク尺度であって、かつＰ－ファトゥ性という性質を持つならば、確率測度の集合があって、ρ(X)は－X の期待値をそれぞれの確率測度で計算したものの上限になるということが成り立ちます。すなわち、コヒーレントリスク尺度とは、シナリオに対する確率（確率測度）を複数考えて、それぞれの確率での -X の期待値を計算して、その上限、一番大きいところを取ることと解釈することができます。現在、正しいと考えている確率での期待値だけではなく、その確率が他のもので置き換わる場合も考えてそれぞれの期待値を計算し、最悪となる期待値を資本として積んでおくという考え方であるとも解釈できます。

(信ずべき）確率の導入

P : $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率測度とする

（シナリオの発生確率が P で与えられると考える）

((P-) 法則不変性）[(P-) law-invariance]

$X, Y \in \mathcal{X}$ X, Y の P の下での確率分布が等しい $\Rightarrow \rho(X) = \rho(Y)$

(コモトニック加法性）[comonotonic additivity]

$X, Y \in \mathcal{X}$ さらに、確率変数 Z, 単調非減少関数 f, g が存在して $X = f(Z), Y = g(Z)$ と表される

$\Rightarrow$

$\rho(X + Y) = \rho(X) + \rho(Y)$

7

これまでは一般論で、確率という概念が本質的には出てきていないのですけれども、確率を用いてリスクを計量すべきという考え方があります。「信ずべき確率」、と言うといいかげんですけれども、数学的には単に今事象の空間Ωと$\mathcal{F}$というものがありますから、その上の確率測度Ｐというものを一つ決めます（正しくは可測空間（$\Omega, \mathcal{F}$）を考える必要があります)。この確率Ｐのもとで世界は動いているのだと考え、シナリオの発生確率がＰで与えられると信じたとします。そう信じたときに、Ｐ－法則不変性（確率Ｐは普通は隠れているので、単に法則不変性とも呼ばれます）とはどのようなものかというと、今、ＸとＹとの二つの確率変数が、その確率分布が、正確にはＰのもとでの確率分布が等しいときはρ（X)=ρ（Y）となる、つまり積むべき資本も等しいということです。すなわち、積むべき資本の量は将来の純資産状況の確率分布のみで決まるということを仮定するのが法則不変性です。

それから、コモノトニック加法性と呼ばれる条件があります。これは少しややこしいのですが、今、ＸとＹという確率変数に対して何か、ある確率変数Ｚがあって、かつ単調非減少関数、単調増加関数と言ってしまっていいですけれども、ｆとｇが存在して、X=f(Z)、Y=g(Z）とあらわされるときに、ρ（X＋Y）はρ（X)＋ρ（Y）に等しいという性質が、コモノトニック加法性と呼ばれる性質です。これは、ＸやＹの裏に根源的な確率変数Ｚがあって、Ｘの大小やＹの大小はＺの大小によって決まる、そのような状況下ではρ（X＋Y）はρ（X)＋ρ（Y）に等しくなるのだという性質です。私はもう一つぴんときていないのですけれども、アクチュアリー学関係の文献ではよく仮定される性質の一つです。

これまでかなり抽象的な話でしたので、具体的なリスク尺度の例を考えていきたいと思います。今、信頼すべき確率Ｐが与えられていて様々な確率が計算可能という前提で話を進めます。

いくつかのリスク尺度の例

P ： $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率測度が与えられているとする

例 1　[Value at Risk] 確率変数 X に対して

X λ- 分位点 (quantile) , $0 < \lambda < 1$,

$$P(X \leqq q) \geqq \lambda \quad \text{かつ} \quad P(X < q) \leqq \lambda \tag{1}$$

を満たす実数 q

$$q_X^-(\lambda) = \inf\{x;\ P(X \leqq x) \geqq \lambda\} \tag{2}$$

$$q_X^+(\lambda) = \inf\{x;\ P(X \leqq x) > \lambda\} \tag{3}$$

とおくと

q が X の λ- 分位点 $\iff$ $q_X^-(\lambda) \leqq q \leqq q_X^+(\lambda)$

8

今、確率変数 X に対して、X の λ 分位点と呼ばれるもの考えます。ここで、λ は 0 より大きく 1 より小さい実数とします。そして、X が q 以下の確率は λ 以上であって、X が真に q より小さい確率は λ 以下となるような q を考えます（式（1））。そのような q を λ 分位点と呼ぶ。実は、λ 分位点というものは、必ずしもひとつとは限らなくて、一番小さい λ 分位点 q_X^-（λ）は式（2）で与えられ、一番大きい λ 分位点 q_X^+（λ）は式（3）で与えられます。そうしますと、q が X の λ 分位点であるということは、q が q_X^-（λ）と q_X^+（λ）の間にあるということになります。確率分布が例えば正規分布のように、正の密度関数を持っていると、λ 分位点は必ず一つに決まるのですけれども、一般には必ずしも一つかどうかはわからないということになります。

$$VaR_\lambda(X) = VaR_{\lambda;P}(X)$$

$$= -q_X^+(\lambda) = q_{-X}^-(1-\lambda)$$

$$= \inf\{m;\ P(X+m<0) \leqq \lambda\}$$

通常の $95\% VaR$ は ここでは $VaR_{0.05}(X)$ となる

$VaR_{\lambda;P}$ は貨幣的リスク尺度で、

正同次性、P-法則不変性、コモノトニック加法性を持つが

凸性を持たない

9

そのときに、バリュー・アット・リスク（VaR）と呼ばれるものは、これは実は確率Pに依存しているわけですけれども、$-q_x^+(\lambda)$ で与えます。正確に言うと、パラメータλのXのVaRと呼ぶべきですが。ここで言葉の使い方に注意が必要です。通常、金融機関が95% VaRと呼んでいるものは、パラメータ0.05のVaRになります。要するに、「1から引いたもの」がここでのパラメータλとなります。

今VaRの定義を与えました。これは確率変数Xを与えるごとに値を返すわけですから、確かにリスク尺度の候補になります。実際これは貨幣的リスク尺度になっています。さらに正同次性、P法則不変性、コモトニック加法性という、挙げてきた性質のうち一つを除いて全部満たします。一つだけ満たさないものが凸性です。ですから、これは凸性を満たさないリスク尺度の例となります。

例2 [Average Value at Risk, Conditional Tail Expectation]

$0 < \lambda \leqq 1$ 確率変数 X に対して

$$AVaR_\lambda(X) = AVaR_{\lambda;P}(X) = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda VaR_{t;P}(X)dt \tag{4}$$

$$AVaR_0(X) = -ess.\inf X$$

$$CTE_\lambda(X) = E[-X|X < VaR_\lambda(X)] \tag{5}$$

$P(X < VaR_\lambda(X)) = \lambda \Rightarrow AVaR_\lambda(X) = CTE_\lambda(X)$

通常は $AVaR_\lambda$ を CTE と呼んでいることも多い。

$AVaR_{\lambda;P}$ はコヒーレントリスク尺度で

P-法則不変性、コモノトニック加法性を持つ

10

また、少しややこしいのですが、アベレージ・バリュー・アット・リスク（AVaR）というものがあります。それに対して、コンディショナル・テイル・エクスペクテーション（CTE）というものをあります。CTEはアクチュアリーの方で頻繁に使われている言葉です。0と1の間の実数λに対して、パラメータλのAVaRは何かというと、複雑ですけれども、式（4）のようにVaRを使って積分で定義します。ちょうどゼロからλまで積分して、λで割っているので、VaRの平均と見なせるので、アベレージ•バリュー•アット・リスクと呼ぶようになったようです。これはフェルマーたちの言葉です。違う言葉を使っている人たちもおりますので、名前はたくさんあります。それから、パラメータ0のアベレージ・バリュー・アット・リスク $AVaR_0(X)$ は、これはXのinf（下限）の符号を変えたものです。ですから、最悪シナリオに対して備えろと言っているに等しくなります。

次に、CTEは、これはPに関する期待値ですが、VaRより小さいところでの－Xの条件つき期待値で定義します（式（5））。実は、私はAVaRとCTEは同じ概念だと思いこんでいたのですが、アクチュアリー関連の本を読んだら､違うと書かれていました。式（5）が正しい定義だそうです。実は､先ほど述べた $q_x^-(\lambda)$ と $q_x^+(\lambda)$ が一致するときのみ、この二つは等しくなります。ほとんどの場合、この差を気にすることはな

いのですけれども、厳密に言うと違うのだということが書いてありました。これは今回の講演のために準備して、初めて知った事実になります。けれども、普通はAVaRをCTEと呼んでいることが多いと思います。このAVaRはコヒーレントリスク尺度になっております。さらに、法則不変性を持ち、コモトニック加法性を持つ。すなわち、先ほど挙げた性質は全て満たします。そのような意味で、これは非常によいリスク尺度だということになっています。

さらに話を進めますと、ショートフォールリスク、あるいはゼロ・ユーティリティーリスクプレミアム、というものがあります。これはまさにビュールマン氏があげた、最初のスライドに出てきたd）です。

例3 [short fall risk, zero utility risk premium]

$u:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ ：真に単調増大な連続関数

$$\rho_u(X)=\inf\{m\in\mathbf{R};\ E[u(X+m)]\geqq u(0)\}$$

$$E[u(X+\rho_u(X))]=u(0)$$

ρ_u は貨幣的リスク尺度、法則不変

u が凹関数であれば、ρ_u は凸性を持つ

$$u(x)=u_\gamma(x)=\frac{1-\exp(-\gamma x)}{\gamma},\qquad \gamma>0 \tag{6}$$

の時、

$$\rho_u(X)=\frac{1}{\gamma}\log E[\exp(-\gamma X)] \tag{7}$$

convex entropic risk measure

11

今、uが真に単調増大な連続関数だとしたときに、ちょうどu(X+m）の期待値がu(0）と一致するmを考えると、uが連続なので一致するmは必ずただ一つ存在する。このmをρ(X）とするという形でρを定めると、これは貨幣的なリスク尺度ですし、期待値で計算しているので、法則不変になります。さらに、uが凹関数であれば、ρ_u は凸性も持ちます。例えばuとして式（6）のような指数的な効用関数を取りますと、ρ_u(X）はこの場合、式（7）のように非常にきれいに計算できます。これはconvex entropic risk measureと呼ばれております。

ρ が P-法則不変、コモノトニック不変なコヒーレントリスク尺度
$\Rightarrow$
$[0,1]$ 上の確率測度 ν が存在して

$$\rho(X)=\int_{[0,1]} AVaR_{\lambda;P}(X)\nu(dx) \quad \text{と表せる}$$

P-法則不変な、コモノトニック不変な凸リスク尺度に対しても
同様な定理がある
distortion と呼ばれる概念と密接な関係がある
様々な、法則不変な、コモノトニック不変な凸リスク尺度が
提案されている（Föllmer-Krispel [5] 参照）

12

実は、次のような定理があります。ρ がもしＰ法則不変であって、コモトニック不変なコヒーレントリスク尺度であるとすると、ρ（X）は必ず、先ほど述べた AVaR の積分であらわすことができる。ν は［0, 1］上の確率測度で、AVaR の１次結合でほとんど全てがあらわすことができるということになります。今、ρ がコヒーレントと仮定しましたが、それを凸リスク尺度と仮定をゆるめても似たような、もう少し複雑になりますが、定理が成立します。AVaR は、VaR の積分で定義できますので、分布関数の逆関数と深い関係にあり、ディストーションと呼ばれる概念と密接な関係があります。この関係については成城大学の塚原さんが詳しく研究されておられます。法則不変でコモトニック不変な凸リスク尺度というものは、学者の間で人気がある話で、たくさんのものが提案されております。これについては参考文献［5］を、もしご興味があれば、ごらんいただければと思います。

リスク尺度に対する注意

「リスク尺度の理論」と「オプション価格理論」は独立している

ヘッジをかける時はオプション価格理論を優先！

ヘッジできない部分に対してリスクを計る

例：ブラックショールズモデル

$AVaR_{\lambda;P}$ $(\lambda > 0)$ でリスク管理

Q リスク中立確率 $Q \neq P$

Y ：$E^Q[Y] = 0 \Rightarrow$ 資金 0 で複製可能

$E^Q[W] = 0$ かつ $AVaR_{\lambda;P}(W) < 0$ となるものが存在

$AVaR_{\lambda;P}(X + aW) \to -\infty,\ a \uparrow \infty$

オプション価格理論優先！

X に対するヘッジを優先するので必要資本は $-E^Q[X]$

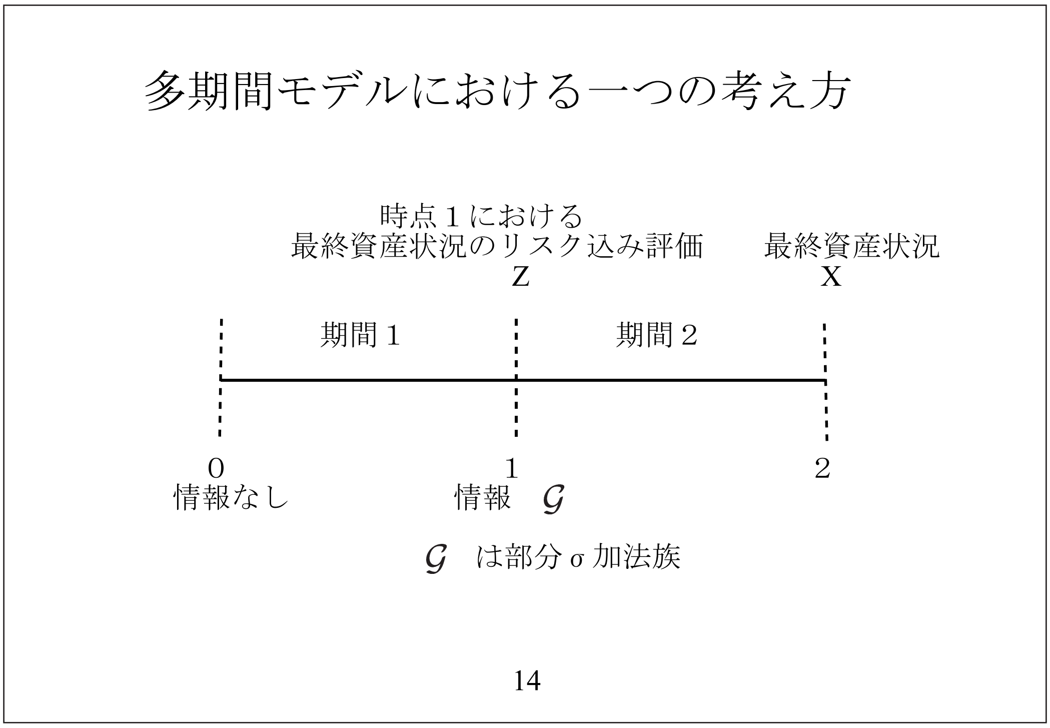
13

リスク尺度に対して一つ注意を述べさせていただきます。リスク尺度の理論は、元々アクチュアリー学の中にあったものかもしれませんが、ファイナンスの理論から出てきました。ファイナンスの理論には、もう一つオプション価格理論というものが存在しております。この二つは全く別の観点から出てきたものなので、矛盾をはらんでいる部分があります。ヘッジをかけるときにはまずオプション価格理論を優先しなさいということがファイナンスの鉄則となっております。そして完全なヘッジができない部分に対して、リスクを計るという考え方で考えなさいということになっています。

なぜ、このような話になっているかと申しますと、次のような例があります。例えばブラック・ショールズ・モデルを考えることにいたします。そのときに、元々の確率 P というものが普通ブラック・ショールズ・モデルの中で与えられております。そこで、その確率 P のもとで、このリスクを管理しようとすること、例えば AVaR でリスクを管理することを考えます。一方において、ブラック・ショールズ・モデルというものに対しては、ただ一つ、リスク中立確率 Q というものが存在します。普通、ブラック•ショールズ•モデルにおいてはこのリスク中立確率 Q と元々の確率 P は異なっております。そして、このオプション価格理論の結論は何かというと、もし Y という確率変数が Q の下での期待値がゼロであれば、資金ゼロで Y を複製可能だということです。もし確率変数 W で、Q の下での期待値はゼロだけれども、AVaR が負であるというようなものが存在していたといたします。この時､W は資本を積まずに複製可能となるわけですが、もしそうだとすると､今どのような X を取ってきても､それに＋ aW という､これは､X が元々のポートフォリオによるものだとすると、aW は一応ヘッジ理論を使って資金ゼロで市場を通じて構成可能なので、同じ資本でこれは実現できるということにオプション価格理論ではなっています。しかし、ここで a を無限へ飛ばすと、AVaR(X+aW) はマイナス無限大に行く。すなわち、資本は幾らでも余っているということになります。ですから、やりたい放題ができてしまいますが、これはどう考えても変だろうということになります。ですから、オプション価格理論を優先することになっています。こういったことに関しては幾つもの研

究があるのですが、この場合はXに対するヘッジを優先するので、必要資本はあくまで $-E^{Q}$［X］であって、決して他のものをつけ加えて、マイナス無限大にすることはできない。X+aWに対してQの下での期待値を計算すると、Wは期待値ゼロですから、同じものしか出てきません。ですから、今の問題に対してはリスク尺度の理論を使ってはいけないというような議論になっていきます。このあたりの議論についてはフェルマー・シードの本［4］などをごらんいただきたいと思います。

ここまででいいかげん嫌になったかもしれませんが、さらにもう少しだけ、数学的にややこしい話をさせていただきます。これまでの議論では1期間だけでリスクを見てきました。けれども、会社が、1年たったら解散するということはめったにないわけで、毎年毎年、決算期になれば、資産状況がどのようになっているかということを問題にします。では、多期間のもとではリスク尺度をどう考えればよいのか。考え方としては次のようなことになります。



例えば今、2期間で考えます。現在は時点0にいるわけですけれども、ここでは情報はないと考えます。次に、期間1があって、期間2があると考えます。時点2は最終時点で、最終資産状況がXだとします。そのときに、このXを評価したいわけです。ただXを評価するといっても、途中の時点1があり、ここで一旦決算が行われるとします。時点1においては、時点0から時点1の間に、何らかの情報を得ているわけですので、時点0ではXの分布はこうだろうと思っていても、時点1では既に情報を得ていますので、Xの分布は条件付き分布といったものに変わっているはずです。このような理由で、この時刻1でXのリスクを評価するとどうなるのかということが問題になります。

ところが、この時点1における情報、これを確率論では、このような数学的な話は聞きたくないかもしれませんが、部分σ加法族と呼ばれるもので表すことになっています。ですから、何か時刻1の情報をあらわす部分σ加法族というものがありまして、それに基づいて、これを評価することになります。その時刻1における情報が部分σ加法族 $\mathcal{G}$ で表されるとすると、この情報 $\mathcal{G}$ を得た上でリスクを評価するということにな

ります。そうすると、当然、元々の確率変数 X に対する評価は、情報$\mathcal{G}$に依存して変わるはずです。時点 0 にいる時はこれから何が起こるかまったくわかりませんからすべてのシナリオを考える必要があります。時点 1 においては、考えていたシナリオの内、時点 0 から時点 1 の期間に何が起きたかを知っているので、時点 0 で考えていたシナリオの中で起こらなかったシナリオは排除して考えることが出来ます。このような意味で情報$\mathcal{G}$に依存して判断することになります。従って、時点 1 で判断して得た積むべき資本の量は$\mathcal{G}$に依存していますので、確率論の立場からはこれは$\mathcal{G}$可測な確率変数ということになります。

「情報を得た上でのリスク尺度」

情報 ＝ 部分 σ-加法族

$\mathcal{G}$ 部分 σ- 加法族　$\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$
その時点までに得る情報を表す

$\mathcal{X}$ ：有界な確率変数（ $\mathcal{F}$-可測関数）全体

$\mathcal{X}_{\mathcal{G}}$ ：有界な $\mathcal{G}$-可測確率変数全体
その時点までに得られた情報で記述できるもの

$\rho_{\mathcal{G}} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}_{\mathcal{G}}$　　確率変数を確率変数に対応させる
その時点までの情報に基づきリスクを計量化する

15

話がだんだんわかりにくくなって申し分けありませんが、このため、条件つきリスク尺度というような概念が必要になります。今の場合は、条件つきリスク尺度は有界な確率変数を、$\mathcal{G}$可測な有界な確率変数に移す変換、数学の言葉で言えば写像、ということになります。もうややこしくて嫌だとお感じになるかもしれませんが、そのようなことになります。確率論を勉強された方はコルモゴロフによる条件つき期待値というものをご存じだと思いますが、これも確率変数を$\mathcal{G}$可測な確率変数に移す写像です。このように条件つきリスク尺度は、コルモゴロフの条件つき期待値の拡張概念と考えることができます。

[必須条件]

（単調性）[monotonicity]

$X, Y \in \mathcal{X},\ A \in \mathcal{G}\ 1_A X(\omega) \leqq 1_A Y(\omega),\ \omega \in \Omega$

$\Rightarrow$

$1_A \rho_{\mathcal{G}}(X)(\omega) \geqq 1_A \rho_{\mathcal{G}}(Y)(\omega),\ \omega \in \Omega$

（キャッシュ不変性）[cash invariance]

$X \in \mathcal{X},\ m \in \mathcal{X}_{\mathcal{G}} \Rightarrow \rho_{\mathcal{G}}(X+m)(\omega) = \rho_{\mathcal{G}}(X)(\omega) - m(\omega)$

（正規化条件）[normalization] $\rho_{\mathcal{G}}(0) = 0$

単調性、キャッシュ不変性、正規化条件を満たすものを
条件付き（貨幣的）リスク尺度と呼ぶ

16

そのようなものに対して、1期間の時のリスク尺度と同じようなことを考えていきます。例えば単調性を考えましょう。今、X と Y が確率変数で、事象 A は時刻 1 で真か偽かが確定しているようなものとします。確率論では、この時、A は$\mathcal{G}$に含まれる要素となります。今、A の上では X より Y の方が必ずよいと仮定します。すると、時点 1 で A が真であることがわかった時、X に対して積むべき資本と、Y に対して積むべき資本を比べると、X に対するものの方が大きくなります。これが単調性です。それを数学的に表現したものが、ここに書かれているものです。以下、詳しい説明をせず、どんどんとばしていきます。キャッシュ不変性というものも同様に定義されます。正規化条件も同様です。ここに書かれていることは要するに、時点 1 においては、$\mathcal{G}$ 可測な確率変数の値は既に確定しているので、定数のように見える。だから、1 期間の時にリスク尺度の性質を考えた時に定数だったものを、全部 $\mathcal{G}$ 可測な確率変数に書きかえていくという形で、様々な条件の定義を与えていっているということです。他も同様です。

その他の条件

（凸性）[convexity]

$X, Y \in \mathcal{X}$, $\lambda \in \mathcal{X}_{\mathcal{G}}$, $0 \leqq \lambda(\omega) \leqq 1 \Rightarrow$

$$\rho_{\mathcal{G}}(\lambda X + (1-\rho)Y)(\omega) \leqq \lambda(\omega)\rho_{\mathcal{G}}(X)(\omega) + (1-\lambda(\omega))\rho_{\mathcal{G}}(Y)(\omega)$$

（正同次性）[positive homogeneity]

$X \in \mathcal{X}$, $\lambda \in \mathcal{X}_{\mathcal{G}}$, $\lambda(\omega) \geqq 0 \Rightarrow \rho_{\mathcal{G}}(\lambda X)(\omega) = \lambda(\omega)\rho_{\mathcal{G}}(X)(\omega)$

$\mathcal{G}$-可測な確率変数は定数のように見なす

17

凸性というものも、条件つきなリスク尺度に対してはこのような条件になります。正同次性もこのような条件になります。$\mathcal{G}$ 可測な確率変数を定数のようにみなして先ほどの定義をただ単に書きかえたにすぎません。このようなわけのわからない話をなぜしているのかと申しますと、実は 2009 年に衝撃的な結果［8］が証明されましたので、それを紹介したいからです。

Kuipper-Schachermayer (2009) の結果

$(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_n\}_{n=0}^{\infty})$: standard filtered probability space

$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$

$\rho_t : \mathcal{X} \to \mathcal{X}_{\mathcal{F}_t}$, $t = 0, 1, \ldots,$ 条件付きリスク尺度

ρ_t は（単調性）、（キャッシュ不変性）、（正規化条件）を満たす

ρ_0 は （凸性）、（P-法則不変性）を満たす

さらに次の条件を満たす

(時間整合性) $\rho_t(-\rho_{t+1}(X)) = \rho_t(X)$, $X \in \mathcal{X}$, $t = 0, 1, \ldots,$

$\Rightarrow$

ρ_0 は convex entropic risk measure 則ち、$\gamma \geqq 0$ が存在して

$$\rho_0(X) = \frac{1}{\gamma} \log E[\exp(-\gamma X)] \tag{8}$$

18

それは以下のようなことです。先ほど述べたように､途中期間において､例えば時刻 1 において決算があって備えるべき資本を評価するには、条件つきのリスク尺度を考えなければいけません。けれども、会社が 2 年で終わるわけでもありませんから、3 年先またその先というように考えると、数学的には延々と無限の時

点を考える必要が出てきます。ですから､時刻が $t=0, 1, 2, 3,\cdots$ と無限にあるとします。ここは､すみません､スタンダード・フィルタード確率空間というわけのわからない言葉が出てきますが、これは要するにどのようなことかというと、時刻0から見て時刻1は、その間に豊富な不確実性がある。今度、時刻1から見ると、時刻2までの間にまた豊富な不確実性がある。すなわち、その間にいろいろなシナリオ、非常に豊富なシナリオがその途中にあり得るということを一応条件として課す、それがスタンダード・フィルタードの意味です。正確な数学的定義は述べませんが、そのようなことを仮定します。

それから、今 ρ_t というものは、時刻tにおける情報が $\mathcal{F}_t$ と考えますので、その時刻tにおける、確率変数を $\mathcal{F}_t$ 可測なものに変換する条件つきリスク尺度だとします。そして、ρ_t は、単調性、キャッシュ不変性、正規化条件を満たすとし、さらに、ρ_0 は最初の時刻0のリスク尺度ですが、これについては凸性と法則不変性を満たすと仮定します。ですから、ρ_t に対しては非常に緩やかな仮定しかしません。最後に非常に強い条件、時間整合性の条件を仮定します。これはどういうものかというと、今、純資産状況を表す確率変数Xを時点t+1で評価し、積むべき資本はZだとします。これは、-Zが時点t+1でのリスクを込めて評価した純資産状況と理解することが出来ます。時間整合性とは、さらにその -Zを時点tで評価した積むべき資本と、最初からXを時点tで評価した積むべき資本の値が同じという性質です。このような性質が成り立つことを仮定する。他の仮定はかなり緩やかですが､最後に時間整合性という非常に強い仮定を置きます。時間整合性があると、最終資産状況がXである時、積むべき資本を後ろ向きに逐次計算していくという必要はなく､いきなり $\rho_0(X)$ を計算すればいいので､この性質があると非常に計算が楽ということになります。

ところが、[8] で示されたことは、これだけの仮定を満たすものとして、ρ_0 は限られたものしかなく、先ほど例3で紹介した convex entropic risk measure しかないということです。すなわち $\rho_0(X)$ というものは、何かパラメータ γ が一つ定まって、式 (8) のように書かれるということが証明されました。これは一般にはコヒーレントではないわけです。ですから、このような仮定を満たすコヒーレントリスク尺度は期待値しかないということになります。実は､式(8)のリスク尺度はビュールマンさんが好きなもので､ビュールマンさんの本 [2] にも出てくるのですが、非常にきれいな性質を多く持ちます。一方で極めて厳しいリスク尺度ですので、実際に使えるかは問題です。この結果の主張することは、いろいろ条件を課すと、ほとんど例がなくなってしまう。だから、例えば時間整合性を緩めたいという考えがでてきます。これについては九大の松本さんが研究されています。

今ご紹介していることはリスク尺度の研究のほんのさわりでして、ものすごい勢いで研究は進んでいて、いろいろな事がわかってきたのですけれども、実際に使えるのかという問題があります。それが一番重要な問題です。最後の話題ですが､リスク尺度の概念と実務の運用の乖離ということをお話ししたいと思います。ここでは実際に銀行などの金融機関においてどのようにリスク計算しているかをお話出来ればよいのですが、それをやると、それだけで2時間、3時間かかってしまいますので、一体何が問題かを本質的にあらわすために、ここでは戯画といいますが、漫画のようなもので、実際とはかなり違うインチキなモデルを使ってお話ししていきます。

リスク尺度の概念と実務での運用の乖離

金融機関（銀行）におけるリスク計算

実際：かなり複雑

本質を明らかにするため　「戯画」　で考える

１週間後、１年後の資産状況に対するリスク計算

１年後の資産状況＝確率変数と考え、確率分布から　VaR　を計算

時間の単位　＝１営業日

毎日の収益を確率変数と考える

$Z_t, t = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$

現在＝時点 0 ：　現在の情報 $\mathcal{F}_0$

$Z_t, t \leqq 0,$ は $\mathcal{F}_0$-可測　確定、既知

19

現在、例えば銀行においては、1週間後の資産状況や1年後の資産状況に対してリスク計算をして積むべき資本が積まれているかどうかをチェックしろと言われております。まず1年後の資産状況を確率変数と考え、銀行では主に VaR を用いておりますので、VaR を計算することを考えます。時間の単位としては、基本的に1営業日が1単位だと考えます。そして、ここが話がインチキな部分ですが、毎日の収益を確率変数と考えモデルをたてると考えます。ですから、時点を t で表しますが、時点は過去から未来までずっとあるとして、Zt　が第 t 日目の収益をあらわすと考えます。また現時点は、時点 0 だといたします。そして、現在の情報は部分 σ 加法族 $\mathcal{F}_0$ で与えられるとします。

そうしますと、今 Z_t というものは、t が負か 0 の時は、既に過ぎ去った時点ですから、Z_t の値をわれわれは知っています。確定しているわけです。数学的に言うと、これらは $\mathcal{F}_0$ 可測だということになります。今問題にしているものは1年間の収益です。今後1年間ですから、X というものを、毎日の収益を t=1 から t=n まで Z_t を足し合わせます。n としては、1年は、正確ではありませんが、250 営業日とします。実際はもう少し多いですけれども。そうすると、VaR や AVaR は、この X の $\mathcal{F}_0$ での条件つき分布がわかれば、計算できます。問題は、このようなものがわかるのかということです。

１年間の収益

$$X = \sum_{t=1}^{n} Z_t$$

$n \sim 250$

条件付き分布関数　$P(X \leqq x|\mathcal{F}_0)$ がわかれば VaR を計算できる

しかし、どのように分布関数を推定するか？

時系列 Z_t に「統計モデル」が設定できるか？

「戯画」

実際には　用いるデータ は収益そのものではない

銀行　確率モデルに基づいてヘッジをかけていく

その「パラメータ」(implied volatility 等）の日々データ

20

では、実際にどのように分布を推定すればいいのでしょうか。まず、時系列 Zt というものがあるわけですが、それに対して統計モデルが設定できるかということがまず問題になります。これはなかなか難しい問題です。例えば生命保険を例にとると、まず保険金支払いというものがあるわけで、それは各時点で、いつどの方が亡くなっていくらお支払いするのとか、それまでに受け取る保険料は幾らかという計算となりますが、大雑把に言って、死亡確率を生命表から計算することになります。しかし、われわれは過去の結果から作製した生命表しか知らないわけです。将来、例えば 30 年後、40 年後にどうなっているかという生命表は完全にはわからないわけです。ただ、われわれは過去の実績から、かなり推定できるのではないかと思っているわけです。しかし実際にはそれほど単純ではないということは、私は昔、アクチュアリー会の死亡率調査委員会の委員の時代に経験しました。あるとき急に、ある年代の女性高齢者の死亡率が改善して、年金に大きな影響が出るのではないかという問題が起こりました。そのときアクチュアリーの方からなる委員会がデータを調べ、医療技術の進歩によって突然死因が一つ消えたという結論になりました。そうすると、生命表の将来予測をするには、医療技術の進歩まで予測しなければならないことになります。そういった意味で生命表ですら簡単には統計モデルは作れないということになります。

統計学における確率統計モデル：「パラメータ」は動かない

ファイナンスの考え方：「モデル」は「真のモデル」ではない！
「パラメータ」が変動することはさけられないと考えている

ヘッジ戦略は「パラメータ」が動かないことを前提として実行
「パラメータ」は日々修正、ヘッジ戦略も日々修正
「パラメータ」変動により完全なヘッジは実際は不可能 ⇐ リスク

「パラメータ」の変動に対する合理的な確率モデル　は考えられるか?

存在すれば最初からそれを組み込んだ「確率モデル」を考える

確率統計モデルのない世界で「データ」を扱う必要がある

21

また、これは銀行の話ですので恐縮ですけれども、銀行は一応、証券価格等に対する確率モデルに基づいてヘッジをかけていきます。ですから、一応それなりに確率モデルを持っているのですが、実際にはインプライド・ボラティリティー等という、その確率モデルのパラメータの値を日々計算しています。もし銀行が用いている確率モデルが完全に正しいものであるなら、パラメータは動かないはずです。けれども、実際には毎日計算するたびに動いている。ですから、この確率モデルが完全なものではないことを銀行の人はみんな知っているわけです。知っていながら、それに基づいてヘッジをかけるということになります。そうすると、日々のパラメータの推移に対してまた確率統計モデルを考えればいいではないかと普通は思うわけですね。しかしファイナンスの考え方としては、モデルは真のモデルではないから、パラメータが変動することは避けられないと考えています。パラメータに対する合理的な確率統計モデルが作れるかという問題は、それが作れるなら、そもそも、それも組み込んだ確率モデルを最初に考えるはずです。しかし、それができないと考えている。すなわちパラメータ変動などはもはや確率モデルを持たないと考えていることになります。ですから、リスク管理等においては実は確率統計モデルのない世界でデータを扱う必要があります。これは極論ですけれども、医療技術の進歩などに関して確率統計モデルを作ることは多分不可能ですので、生命表ですら、もしかすると、この類いになるかもしれないわけです。ですから、リスクの計量化の実際は非常に難しい問題をはらんでいます。

金融リスクの中の市場リスクというものですけれども、これはもちろん市場の価格変動が原因で発生するリスクです。ヘッジできない資産の変動リスクについて、ある程度は確率統計モデルを作れるかもしれませんが、例えばパラメータ変動から来るヘッジのエラーリスクというようなもの、通常これをもってモデルリスクと呼んでいるようですけれども、このようなものは今申し上げたように確率統計モデルは立たない、あるいは立てられない。余談ですが、私は最初、市場リスクにモデルリスクが入っていると聞いて不思議だなと思ったのですが、よくよく聞くと、モデルリスクというものは、モデルが完全に間違っているリスクでは

ないということです。モデルが完全に間違っているリスクはオペレーショナルリスクで、要するに人間の間違いに属するということです。

では、どうやってリスクを管理するのかというと、実際に幾つかの銀行に聞きまして、多くの銀行では以下のような方法で VaR を計算しているようです。

モデルがなければどうするか（実務でのやり方）

$M \geqq 1$ を設定　($M \sim 1,000$　　過去4年間のデータ)

過去データ　$Z_{-M+1}, Z_{-M+2}, \ldots, Z_{-1}, Z_0$ を元に

経験分布関数 $\hat{F}$ を

$$\hat{F}(x) = \frac{1}{M} \sum_{t=-M+1}^{0} 1_{\{Z_t \leqq x\}}, \qquad x \in (-\infty, \infty)$$

を求め $\hat{F}^{(*n)}$（コンボリューション）で $P(X \leqq x | \mathcal{F}_0)$ を推定

しかし、これは Z_t が独立同分布と仮定しているも同然

しかし、独立同分布と仮定しても数学的には問題がある

22

すなわち、まず過去データを基に Z_t の経験分布関数を作ります。過去データをずっとさかのぼるかというと、そうではなくて過去4年間のデータ大体1,000個ぐらいのものを使って、このような経験分布を作ります。次に、X の分布はコンボリューションを使って推定している。コンボリューションとは何かは説明しませんが、要するに、この推定方法は Zt が独立同分布の確率変数だとみなしているも同然なのです。これは非常に不思議なことです。すなわち、Z_t に対して確率統計モデルが立たないから、独立同分布にしてしまおうという、非常に極端から極端へ移っているわけですけれども、数学的にはまさにそのような取り扱いをして計算するわけです。

では、百歩譲って、Zt は独立同分布だとしましょう。その場合は、この計算方法は本当にいいのでしょうか。実は非常に問題があります。独立同分布な確率変数の和の分布はどのようになるかというと、皆さんは当然のことながら、まず平均を引いて、そして残りは中心極限定理で推定するということを考えられると思います。

標準正規分布の分布関数

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \exp(-\frac{y^2}{2})dy$$

独立同分布な確率変数の和に対する中心極限定理

$$P(\sum_{k=1}^{n} Z_k < \sum_{k=1}^{n} E[Z_k] - n^{1/2}x) \to \Phi(-x/\sigma), \quad n \to \infty \tag{9}$$

ただし　σ は　Z_k の標準偏差

23

これが普通の考え方です。式（9）が中心極限定理で、正規分布で確率が計算できます。しかし、VARのように小さい確率を問題にする時は、確率の差ではなく、比が問題となります。これに関して、ナガエフという人の1979年の結果［9］があります。これについて説明します。

式（10）にあるように、元々のZtの分布関数のようなものF(x）がxが増大する時Cx$^{-\beta}$のような感じで減少するとしましょう。これはいわゆるFat tailをもつ分布です。βが2より大きい場合は中心極限定理が成立するわけですけれども、この時、この独立確率変数の和の分布の裾野の確率を知るには、正規分布の確率に補正項nF(－ x+E[Z_0]）を足す必要があることをナガエフの結果は主張しております。

Nagaev (1979) の 結果

仮定　$\beta > 2$, $C > 0$ があって

$$F(x) = P(Z_k \leqq -x) \sim Cx^{-\beta}, \qquad x \to \infty \tag{10}$$

この時以下が成立

$$\sup_{x \in [n^{1/2}, \infty)} \left| \frac{P(\sum_{k=1}^{n} Z_k < \sum_{k=1}^{n} E[Z_k] - x)}{\Phi(-x/(\sigma n^{1/2})) + nF(-x + E[Z_0])} - 1 \right| \to 0, \quad n \to \infty$$

分布の裾 (小さい確率の分位点) を出すには中心極限定理は不十分

補正項 $nF(-x + E[Z_1])$ が 0.05 の点を知るには
$P(Z_k - E[Z_k] < -x) = 0.05/n = 1/5,000$ ($n = 250$ の時) と
なるところを知る必要がある

24

中心極限定理というものは実は平均の近くの分布をきれいに記述していますが、裾野の方は正規分布だけではかなり過小評価してしまうということです。95%の VaR を求めたいと思うと、X が x 以下となる確率が0.05となるようなxの値を知りたいという事になります。もしナガエフが仮定したようなことが成り立ち、補正項がかなり効いてくるとすると、補正項は nF(y) という形をしていますので、これが 0.05 であるということは、F の n 倍が 0.05 ということですので、例えば n は 250 だとすると、F(y) が 5,000 分の 1 になるyを知る必要が出てきます。つまり、Zt が y 以下となる確率が 5,000 分の 1 となる y を求めよということになります。ところが、われわれは 1,000 しかデータを持っていないわけです。1,000 しかないデータのもとで、どうやって 5,000 分の 1 の確率のところを知ることが出来るのか。これを知るには Zt の分布についてあらかじめよくわかっていることが必要となります。しかし、よくわからないからコンボリューションという方法を使っているわけで、現在、実際で行われている VaR の推定方法は、非常に乱暴な危ない方法です。

実際に、コンピューターでシミュレーション実験をやると、先ほどの金融機関で行っている VaR の推定値は非常にぶれます。すなわち、乱数を 1,000 発生させてコンボリューションを使って VaR を計算してみると、毎回毎回、値が全く違うということが起こります。ですから、うまくいかないことは経験上わかっています。別のある金融機関に VaR の推定方法について聞いたら、なかなかここはすごいなと思ったのですが、「うちは正規分布でやっています」とのお答えでした。正規分布なら、平均と分散の推定ですから、1,000 のデータがあれば、かなり推定はいいのですが、「正規分布でまず VaR を計算し、その 3 倍したものを VaR の推定値とします」とのことでした。3 倍の根拠はよくわからないのですけれども、それで経験上うまくいっていると言われると、それ以上質問のしようがありませんでした。そのようなことをやっている人たちもいます。このように考えていくと、独立同分布だということを認めても、数学的にかなり怪しい、統計学の外にはみ出ていることが行われております。

さらに、もっと重要な本質的な問題があります。といいますのは、構造がわからないから、独立同分布に対する統計理論を適用ということで、まず、統計学的な問題がありますけれども、それ以上に問題なことは、例えばもしバブルが 4 年間続いたとすると、過去 4 年間のデータで本当に未来予測が出来るのかということです。いや、もっとさかのぼってデータをとればいいのではないかという考えもあるでしょうが、生命保険の場合はどうなのかよくわかりませんが、例えば銀行などの場合ですと、新商品をどんどん出していくので 10 年前には存在しないような商品がたくさんあり、データの欠損が巨大になってしまうため、10 年前にさかのぼることはできないようです。無理にやろうとすると、多数の欠損データの処理という別の問題が生じてしまいます。ですから、4 年間であれば、何とかデータをそろえられるということですが、リーマンショックが起こって振り返って考えてみると、ここが大問題だったのではないのかと考えます。

本質的な問題点

「構造がわからない」 $\rightarrow$ 「独立同分布」に対する統計理論の適用

バブルが4年間続く

過去データ　$Z_{-M+1}, Z_{-M+2}, \ldots, Z_{-1}, Z_0$ は信頼できない

経験分布関数 $\hat{F}$ は全く無意味かもしれない

$P(X \leqq x|\mathcal{F}_0)$ を既知とする理論の適用はナンセンス

リスクの計算：コンピュータに頼らざるを得ない

自動化・機械化されている

プログラムの中身を知らないままにリスクを計算している

25

実は、AVaRやCTEなどは、VaRよりさらに計算が難しいわけです。平均を計算する必要がありますから、もっと小さい確率のところまで見ないといけない。しかしリスク尺度の理論では、このようなものは推定可能としていますが、現実にはこれは簡単に推定できることではない。リスク尺度の理論はどんどんと進歩し精緻になっていっていますが、実務に適用する時は、最初でつまずいていると感じております。また、リスクの計算は実際にはコンピューターに頼らざるを得ない。実際問題として、とてつもない計算をしているので、人間がその過程を目で見ることはできない。そうすると、人間が目で見ていたら「何かおかしいな」と気がついたかもしれないことも全部見過ごされるだろうと思います。この数値は過去とかなり違うけれども原因は何でしょうかと考えることがなくなりつつあります。ですから、このようなリスク管理のあり方は非常に怖いなと思っております。

このためリスクの計量化の実際の計算法までを考慮した、頑健なリスク管理手法が必要と思います。最後にこれについて私の今考えていることをお話しします。リスク尺度の研究はよかったけれども、そもそもバーゼルの考え方のように、将来の不確実なものについて毎年計算して必要な資本を積んでおきなさいという考え方は、合理性はあるけれども、現実には独立同分布モデルで計算してしまっており、結局、過去も未来もみな独立同分布であることを前提としてしまうところがあるわけで、そもそも問題があるのではないか。今日の白川様（前日銀総裁）の講演でも似たような感じのことをおっしゃっていましたけれども、未来を合理的に予測し資本を積むという考え方が現実的なのかはかなり疑問です。例えばボルカーさんが提案していることは、色々なやり方でリスク量を計算し、必要資本を計算し、普通はその最大値を取るのが理にかなっているのですが、それを全部足した額の資本を積みなさいということのようです。とにかく資本を積め、積めといっているのですが、今の状況では、全くリスクは取れない状況にがんじがらめにしているという感じがしています。私は、それは結構だけれども、景気がよくない時においては、リスクを取ることに対してとてつもない重荷になる一方で、もしバブルが起こったときに、実は、そのようなものは何の足かせにもならな

いというようになるかもしれない。それではいざという時に暴走をとめる事は出来ないだろうと私は思っております。

では、どうするのかということですが、ここからは研究があまりできていなくて、まだ思いつきにすぎないのですが、思いつきといっても、2、3年かけての思いつきですけれども、お話しさせて頂きます。生命保険の歴史を見直してみると、17、18世紀に生命保険会社がばたばたと倒れたという歴史があるわけですね。そのときには、責任準備金の概念がなかったわけです。ですから、保険料が入ったら、もうかった、もうかった、利益を配ってしまえとなり、後になって「あれっ、足りないぞ」というような話になるわけです。それに対して、イギリスの生命保険会社 The Equitable では責任準備金という概念を出して、それがアクチュアリーというものの発祥でもあるわけですけれども、責任準備金を積むという形でこの問題に対処したわけです。今日では非常にそれは合理的だということはわかっております。現在は会計上の理由から準備金と資本というものが、だんだん区別がつかなくなりつつあると聞いておりますが、私は、概念としては全く違うと思っております。私の考えは、要するに、資本だけではなく準備金を積めということです。どのように準備金を積むのが合理的かという問題がまずあります。また、準備金を積んでも税務署がごそっと税金を取るぞと言ってくるかもしれないし、株主はなぜ配らないのかと文句を言ってくるかもしれないなど、いろいろな問題があります。

けれども、ご存じと思いますが、証券会社等でもトレーダーが大儲けしてもすぐにはボーナスを渡さないというような制度になりつつあるわけです。後で大儲けは見かけだけで実は大損していたことがわかったなど、いろいろなことがあるために、厳しいルールがだんだんできているわけです。同じように、準備金といった形で儲かった時に利益をすぐに配らずだんだんと還元する方法がいいのではないかと考え始めました。かつて、ある金融関係の会社の社長さんから、「昔はちょっとしたお金をもうけると、3分の1はみんなに配る、3分の1は準備金として積む、3分の1は何か未来に投資するというふうにやっていた」と聞いたことがあります。けれども、今はそのような適当なことをやったら、多分会計などの理由で怒られるでしょう。そのやり方にいかなる合理的な根拠があるかといわれると困ると思いますが、それは人間の知恵だと思うのです。

例えば

「今期の利益」＋「前期までの準備金」 G （確定）
「来期の（G を除いた）資産状況」 X ： 確率変数

積むべき資本 $\max\{\beta G, \rho(X)\}$ $\beta \in (0,1)$
利益処分を数年に渡って行う

といった制度

[安全性の確認]
◇ 定常モデルの下での倒産時刻の分布
◇ ストレスシナリオの下での倒産確率：ストレステスト

26

ここに書いてあることは、ただ思いつきを述べているだけです。リスクを考えるときに、ただ単に、モデルの下での、純資産状況の分布などというだけでは十分ではないと考えています。現在ストレステストというものが行われていますが、それは会社における資産の現状がストレステストに耐えられるかを見ているわけです。そういう形のストレステストではなく、リスクの計量のやり方を含めたリスク管理の制度をストレステストすべきであると思っております。ここで書いた準備金も用いたリスク管理手法と従来の資本を積むというリスク管理手法を比較して、想定したモデルと違う状況が起きた場合にどちらがより頑健かといったことを調べていくことを考えております。その際、リスクの計量化については実際に可能な推定方法を用いて行うべきと思っております。研究成果らしきものが出るには、あと 5 年か 10 年ほどかかるかもしれませんが、一生懸命研究したいと思っております。これで話を終わらせて頂きます。

［参考文献］

［1］ Artzner, P., Delbaen, D., Eber, J-M., and Heath, D., Coherent measure of risk, Math. Finance, 9（1999）, 203-228

［2］ Bühlmann, Hans, Mathematical Methods in Risk Theory, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer, 1970

［3］ Denui, Michel, Jan Dhaene, Marc Goovaerts, and Rob Kaas, Actuarial Theory for Dependent Risks: Measures, Orders and Models, John Wiley & Sons 2005

［4］ Föllmer, Hans, and Schied, Alexander, Stochastic finance. An introduction in discrete time. Third revised and extended edition, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2011.

［5］ Föllmer, Hans, and Thomas Knispel, Convex Risk Measures: Basic Facts, Law-invariance and beyond, Asymptotics for Large, Handbook of the Fundamentals of Financial Decision Making, Part II, 507 - 554, Eds. L.C. MacLean and W.T. Ziemba, World Scientific（2013）

［6］Fushiya, F., and S. Kusuoka, Uniform Estimate for distributions of the sum of i.i.d. random variables with fat tail, J. Math. Sci. Univ. Tokyo 17（2010）, 79-121.

［7］ Gerber, H.U., An Introduction to Mathematical Risk Theory, Huebner Foundation Monograph 8, Huebner Foundation 1979.

［8］ Kupper, M., and W. Schachermayer, Representation results for law invariant time consistent functions, Math. Financ. Econ. 2（2009）, no. 3,189-210.

［9］ Nagaev, S. V., Large deviations of sums of independent random variables, Ann. Probab. 7（1979）, 745-789.