———————編集委員会依頼論文———————

市場リスクの計量化における統計学的問題点

楠岡成雄　伏屋広隆 *

2017 年 9 月 4 日投稿
2017 年 9 月 4 日受理

概要

金融機関（特に銀行）において用いられているリスク尺度はほとんどの場合 VaR もしくは CTE である。また、対象となる確率変数を同分布を持つ独立確率変数の和ととらえ、過去データより VaR 等をノンパラメトリックな手法で推定していることが多い。この論文では関連する確率論の結果を紹介し VaR 等の推定のような小さい確率の推定をノンパラメトリックな手法で行うことが非常に困難な問題であることを解説する。
キーワード：VaR, 統計推測、同分布を持つ独立確率変数の和

1　はじめに

金融リスクの計量化については、リスク尺度の研究の結果、様々な手法が提唱されている。しかし、金融機関で実際に使われているものは VaR(Value at Risk) もしくは CTE (Conditional Tail Expectation) に限られている。さらに、銀行では VaR だけが用いられているといっても過言ではない。VaR には凸性の欠如等の問題が指摘されているにも関わらず用いられている理由は、最も統計推測が容易で、信頼性が高いからと思われる。しかし、最も扱いやすいはずの VaR に対しても統計推測の観点からは大きな問題がある。

銀行で行われている VaR の標準的な計算方法においてはほとんどの場合、（かなり強引に）同分布を持つ独立確率変数の和の問題に帰着させている。これは、金融リスクから発生する損失に対して有効と思われるパラメトリックな確率モデルが存在しないため、過去データだけから将来を予測するには、独立確率変数の和が最も簡単なモデルとなるからである。しかし、同分布を持つ独立確率変数の和であっても VaR の計算は容易ではない。このことを示すことがこの論文の目的である。ただ、現在行われている VaR の計算方法に代わるものを提示することは残念ながらできず、単なる問題点の提起にとどまってしまうが、今後 VaR の計測に関して何かヒントとなれば幸いである。

さて、数学的設定をはっきりさせよう。$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とし、X_n, $n \in \mathbf{Z}$, ($\mathbf{Z}$ は整数の集合）は同分布を持つ独立確率変数列とする。この論文では以下の問題を考える。

問題. $N, M \geqq 1$ とし、確率変数 $X_{-N+1}, X_{-N+2}, \ldots, X_0$ の値を観測した時、

$$p_M(x) = P(\sum_{k=1}^{M} X_k > x), \qquad x \in \mathbf{R}$$

の値を推定せよ。

* 青山学院大学 社会情報学部, fushiya@gmail.com

VaR 等の問題を考える時は、$p_M(x) = 0.05,\ 0.01$ といった方程式の x の値を求めることが問題となる。銀行などのリスク管理においてはおおよそ過去 4 年間（約 1000 営業日）のデータを用いて 1 週間後、1 ヶ月後、3 ヶ月後、1 年後（それぞれ、5、約 20、約 60、約 250 営業日後）等のリスクを計るので、ここでは N は約 1000 程度、M は 5, 20, 60, 250 といったオーダーを念頭に置いている。

以下では

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty \exp(-\frac{y^2}{2})dy, \qquad x \in \mathbf{R}$$

とする。Φ については以下の評価がよく知られている (c.f.. Williams [7])。

命題 1　$x > 0$ に対して

$$(x + x^{-1})^{-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \leqq \exp(\frac{x^2}{2})\Phi(x) \leqq x^{-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

が成立する。

よく知られているように以下のような中心極限定理が成立する (c..f. Williams [7])。

命題 2　$X_1, X_2, \ldots$ が同分布を持つ独立確率変数の列で、$E[X_1^2] < \infty$ であると仮定する。この時、$E[X_1] = \mu$, $E[(X_1 - \mu)^2] = v$ とおくと

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} |P((nv)^{-1/2} \sum_{k=1}^n (X_k - \mu) > x) - \Phi(x)| \to 0, \qquad n \to \infty$$

が成立する。

この命題より、X_1 の平均が μ, 分散が $v > 0$ であれば

$$P(\sum_{k=1}^M X_k > x) = P(\frac{1}{\sqrt{Mv}} \sum_{k=1}^M (X_k - \mu) > \frac{x - M\mu}{\sqrt{Mv}})$$

であるので、M が十分大きい時は $p_M(x)$ は $\Phi((Mv)^{-1/2}(x - M\mu))$ で近似できるとすると、観測データ $X_{-N+1}, \ldots, X_0$ より平均・分散を推定すれば良いことになる。これが中心極限定理による VaR 等の推定方法である。残念ながら、この方法には問題がある。中心極限定理は M が十分大きい時 $p_M(x)$ と $\Phi((Mv)^{-1/2}(x - M\mu))$ の差が小さくなるということをいっているだけであり、元々 $p_M(x)$ の小さくなる x を求めようとしているので x の値がどれぐらいの精度で求まっているのかよくわからない。

もし、$p_M(x)$ と $\Phi((Mv)^{-1/2}(x - M\mu))$ の比が M が十分大きい時に 1 に近いといったことが言えれば信頼性が増すことになる。このような比に関する研究も古くからなされているので、これについて述べていく。

2　クラメールの条件が成り立つ場合

命題の記述を簡単にするため、以下のような条件を考える。

(基本条件) $E[X_1^2] = 1$ であり、$E[X_1] = 0$ である。

次の条件をクラメールの条件と呼ぶ。

(条件 C) $E[\exp(\lambda_0|X_1|)] < \infty$ を満たす $\lambda_0 > 0$ が存在する。

この節では基本条件及び (条件 C) の下でどのようなことが成り立つかを見ていく。なお、詳しく書かれた教科書がないので証明付きで述べていく。

命題 3　関数 $\varphi : [-\lambda_0/2, \lambda_0/2] \to (0, \infty)$ を

$$\varphi(\lambda) = E[\exp(\lambda X_1)], \qquad \lambda \in [-\lambda_0/2, \lambda_0/2]$$

で定める。この時、φ は C^∞-級であり、$\varphi(\lambda) \geqq 1$, $\varphi^{(m)}(\lambda) = E[X_1^m \exp(\lambda X_1)]$, $m = 1, 2, \ldots$, $\lambda \in [-\lambda_0/2, \lambda_0/2]$ が成立する。特に、$\varphi(0) = 1$, $\varphi'(0) = 0$, $\varphi^{(2)}(0) = 1$ が成立する。

証明. φ が C^∞-級であることは、$\lambda \in [-\lambda_0/2, \lambda_0/2]$ の時

$$E[|X_1|^n \exp(\lambda X_1)] \leqq n!(2/\lambda_0)^n E[\frac{|(\lambda_0/2)X_1|^n}{n!} \exp((\lambda_0/2)|X_1|)] \leqq n!(2/\lambda_0)^n E[\exp(\lambda_0|X_1|)] < \infty$$

よりわかる。また、これより微分と期待値の交換ができるので後半の主張も得る。最後にジェンセンの不等式より

$$\varphi(\lambda) = E[\exp(\lambda X_1)] \geqq \exp(E[\lambda X_1]) = 1$$

より $\varphi(\lambda) \geqq 1$ もわかる。

∎

命題 4　C^∞-級関数 $f : [-\lambda_0/2, \lambda_0/2] \to [0, \infty)$ を

$$f(\lambda) = \log \varphi(\lambda) = \log E[\exp(\lambda X_1], \qquad \lambda \in [-\lambda_0/2, \lambda_0/2]$$

で定める。この時、$f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $f^{(2)}(0) = 1$ および $f^{(2)}(\lambda) > 0$ が成立する。

証明. $f(0) = 0$ は明らか。また $f'(\lambda) = \varphi(\lambda)^{-1}\varphi(\lambda)$ であり、

$$f^{(2)}(\lambda) = \varphi(\lambda)^{-1}\varphi^{(2)}(\lambda) - \varphi(\lambda)^{-2}\varphi'(\lambda)^2 = \varphi(\lambda)^{-2}(E[\exp(\lambda X_1)]E[X_1^2 \exp(\lambda X_1)] - E[X_1 \exp(\lambda X_1)]^2)$$

である。これより $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $f^{(2)}(0) = 1$ がわかる。

また、シュバルツの不等式より

$$E[|X_1| \exp(\lambda X_1)] = E[\exp(\lambda X_1)^{1/2}(X_1^2 \exp(\lambda X_1))^{1/2}] \leqq E[\exp(\lambda X_1)]^{1/2} E[X_1^2 \exp(\lambda X_1)]^{1/2}$$

であり、基本条件より

$$|E[X_1 \exp(\lambda X_1)]| < E[|X_1| \exp(\lambda X_1)]$$

であるので $f^{(2)}(\lambda) > 0$ がわかる。

∎

さて、$f^{(2)}(\lambda) > 0$, $\lambda \in [-\lambda_0/2, \lambda_0/2]$, であったので、$f' : [-\lambda_0/2, \lambda_0/2] \to [f'(-\lambda_0/2), f'(\lambda_0/2)]$ は真に単調増加な全単射であり、その逆関数を $I : [f'(-\lambda_0/2), f'(\lambda_0/2)] \to [-\lambda_0/2, \lambda_0/2]$ とおくと、I は C^∞-級関数となる。

さらに以下のことが成立する。

命題 5　$I(0) = 0$ であり、$I'(x) = f^{(2)}(I(x))^{-1}$, $x \in (f'(-\lambda_0/2), f'(\lambda_0/2))$, が成立する。特に、$I'(0) = 1$, $I'(x) > 0$, $x \in (f'(-\lambda_0/2), f'(\lambda_0/2))$, である。

さらに、$H : [f'(-\lambda_0/2), f'(\lambda_0/2)] \to \mathbf{R}$, $F : [f'(-\lambda_0/2), f'(\lambda_0/2)] \to \mathbf{R}$ を

$$H(x) = I'(x)^{-1/2} I(x), \quad F(x) = f(I(x)) - xI(x) + \frac{1}{2}H(x)^2, \quad x \in [f'(-\lambda_0/2), f'(\lambda_0/2)]$$

で定めると、$H(0) = 0$, $H'(0) = 1$, $H^{(2)}(0) = 0$, $F(0) = F'(0) = F^{(2)}(0) = 0$ が成立する。

証明. $f'(0) = 0$, $f'(I(x)) = x$ より、$f^{(2)}(I(x))I'(x) = 1$, がわかり、前半の主張がわかる。また、

$$H'(x) = -\frac{1}{2}I'(x)^{-3/2}I^{(2)}(x)I(x) + I'(x)^{1/2},$$

$$H^{(2)}(x) = -\frac{1}{2}\frac{d}{dx}(I'(x)^{-3/2}I^{(2)}(x))I(x),$$

であるので、$H(0)=0$, $H'(0)=1$, $H^{(2)}(0)=0$ であることがわかる。また、

$$F'(x)=f'(I(x))I'(x)-I(x)-xI'(x)+I(x)-\frac{1}{2}I'(x)^{-2}I^{(2)}(x)I(x)^2=-\frac{1}{2}I'(x)^{-2}I^{(2)}(x)I(x)^2$$

より最後の主張もわかる。

∎

以上の準備の下、次の定理を得る。この定理は本質的に Cramér [2] によるものである。

定理 6 $\alpha\in(0,1/2)$, $a>0$ とする。この時、基本条件及び (条件 C) の下で $n_0\geqq 1$ および $C_0\in(0,\infty)$ が存在して

$$\left|\frac{P(n^{-1/2}\sum_{k=1}^{n}X_k>x)}{\exp(nF(n^{-1/2}x))\Phi(n^{1/2}H(n^{-1/2}x))}-1\right|\leqq C_0(1+x)n^{-\alpha}\quad x\in[0,an^{\alpha}],\ n\geqq n_0$$

が成立する。

この定理の証明は複雑なので、第 5 節で証明を述べる。

大雑把に言って、$\alpha\in(0,1/2)$ である時、若干の補正項が必要であるが、(条件 C) の下では正規分布は $P(n^{-1/2}\sum_{k=1}^{n}X_k>x)$, $x\in[-n^{\alpha},n^{\alpha}]$, をよく近似していることがわかる (第 6 節も参照)。

また、以下の事実もよく知られている。

定理 7 基本条件及び (条件 C) の下で以下が成り立つ。

(1) 任意の $z\in(0,\lambda_0/2)$ に対して

$$n\log P(n^{-1/2}\sum_{k=1}^{n}X_k>n^{1/2}z)\to\max_{\lambda\in[0,\lambda_0/2]}(f(\lambda)-\lambda z)=f(I(z)),\qquad n\to\infty$$

が成り立つ。

(2) $\alpha\in(0,1/2)$ とする。任意の $z>0$ に対して

$$n^{1/2+\alpha}\log P(n^{-1/2}\sum_{k=1}^{n}X_k>n^{\alpha}z)\to-\frac{1}{2}z^2,\qquad n\to\infty$$

が成り立つ。

上記定理の主張 (1) はクラメールの大偏差原理としてよく知られている。主張 (2) はしばしば小偏差原理と呼ばれる。主張 (2) の極限は X_1 の平均・分散のみが現れているのに対し、主張 (1) の極限は X_1 の分布に大きく依存している。主張 (1) はクラメールの条件があっても、$P(n^{-1/2}\sum_{k=1}^{n}X_k>x)$ を正規分布で近似できる x の範囲には限界があることを示している。

3 Heavy tail の場合

今、$F:\mathbf{R}\to[0,1]$, $\bar{F}:\mathbf{R}\to[0,1]$, を

$$F(x)=P(X_1\leqq x),\quad \bar{F}(x)=P(X_1>x),\qquad x\in\mathbf{R}$$

で定める。この節では次のような条件のなりたつ場合を考察していく。

(条件 F) $\alpha>0$ が存在して

$$L(x)=x^{\alpha}\bar{F}(x),\qquad x\geqq 1,$$

とおくと、$L(x)>0$, $x\geqq 1$, であり任意の $a>0$ に対して

$$\frac{L(ax)}{L(x)}\to 1,\qquad x\to\infty.$$

が成り立つ。

次のような定理が Feller [3] により示されている。

定理 8 (条件 F) が成立する時、任意の $n \geqq 1$ に対して

$$\frac{P(\sum_{k=1}^n X_k > x)}{n\bar{F}(x)} \to 1, \qquad x \to \infty$$

が成立する。

証明. Feller の定理はしばしば X_1 が非負値という仮定の下で証明されるが、その必要はないので証明を述べておく。今、$X_1, \ldots, X_n$ のうち 2 番目に大きなものの値を Z とする。すなわち、

$$Z = \min_{k=1,\ldots,n} \max\{X_\ell;\ \ell \neq k, \ell = 1, \ldots, n\}$$

とおく。この時、

$$\{\sum_{k=1}^n X_k > x\} \subset \{\max_{k=1,\ldots,n} X_k > \frac{1}{n}x\}$$

であるので、任意の $\varepsilon \in (0, 1/n)$ に対して

$$\{\sum_{k=1}^n X_k > x\} \subset (\{\sum_{k=1}^n X_k > x\} \cap \{Z \leqq \varepsilon x\}) \cup (\{\max_{k=1,\ldots,n} X_k > \frac{1}{n}x\} \cap \{Z > \varepsilon x\})$$

となる。

$$P(\{\max_{k=1,\ldots,n} X_k > \frac{x}{n}\}) \cap \{Z > \varepsilon x\}) = P(\bigcup_{1\leqq i,j\leqq n, i\neq j} (\{X_i > \frac{1}{n}x\} \cap \{X_j > \varepsilon x\})$$

$$\leqq n(n-1)\bar{F}(\frac{1}{n}x)\bar{F}(\varepsilon x) = n(n-1)n^\alpha L(x/n)L(x)^{-1}\bar{F}(x)\bar{F}(\varepsilon x)$$

であるので、

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\, \bar{F}(x)^{-1} P(\{\max_{k=1,\ldots,n} X_k > \frac{x}{n}\}) \cap \{Z > \varepsilon x\}) = 0$$

となる。また、

$$P(\{\sum_{k=1}^n X_k > x\} \cap \{Z \leqq \varepsilon x\}) \leqq P(\{\max_{k=1,\ldots,n} X_k > (1-(n-1)\varepsilon)x\} \cap \{Z \leqq \varepsilon x\})$$

$$\leqq P(\bigcup_{k=1}^n \{X_k > (1-(n-1)\varepsilon)x\}) \leqq n\bar{F}((1-(n-1)\varepsilon)x)$$

$$= n(1-(n-1)\varepsilon)^{-\alpha}\bar{F}(x)L((1-(n-1)\varepsilon)x)L(x)^{-1}$$

であるので

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\, \bar{F}(x)^{-1} P(\{\sum_{k=1}^n X_k > x\} \cap \{Z \leqq \varepsilon x\}) \leqq n(1-(n-1)\varepsilon)^{-\alpha}$$

を得る。これらより

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\, (n\bar{F}(x))^{-1} P(\sum_{k=1}^n X_k > x) \leqq (1-(n-1)\varepsilon)^{-\alpha}$$

がわかり、ε は任意にとれるので

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\, (n\bar{F}(x))^{-1} P(\sum_{k=1}^n X_k > x) \leqq 1$$

がわかる。一方、

$$P(\sum_{k=1}^{n} X_k > x) \geqq P(\{\sum_{k=1}^{n} X_k > x\} \cap \{\min_{k=1,\dots,n} X_k > -\varepsilon x\}))$$

$$\geqq P(\{\max_{k=1,\dots,n} X_k > (1+(n-1)\varepsilon)x\} \cap \{\min_{k=1,\dots,n} X_k > -\varepsilon x\}))$$

$$\geqq P(\bigcup_{k=1}^{n}(\{X_k > (1+(n-1)\varepsilon)x\} \cap (\bigcap_{i=1,\dots,n, i\neq k} \{-\varepsilon x < X_i \leqq x\}))$$

$$= n\bar{F}((1+(n-1)\varepsilon x)(1-F(-\varepsilon x)-\bar{F}(x))^{n-1}$$

を得るので

$$\varliminf_{x\to\infty}(n\bar{F}(x))^{-1}P(\sum_{k=1}^{n} X_k > x) \geqq (1+(n-1)\varepsilon)^{-\alpha}$$

となり、

$$\varliminf_{x\to\infty}(n\bar{F}(x))^{-1}P(\sum_{k=1}^{n} X_k > x) \geqq 1$$

を得る。よって定理は証明された。

∎

Feller の定理の証明では $x \to \infty$ の時 $P(\sum_{k=1}^{n} X_k > x)$ は $P(\max_{k=1,\dots,n} X_k > x)$ とほぼ同じであるということを用いている。$\alpha > 2$ であれば（条件 F）の下でも平均・分散が存在しうるが、$x \to \infty$ の時 $P(\sum_{k=1}^{n} X_k > x)$ は正規分布のように早くは減衰しないことがわかる。

(条件 F）が成立する場合に対する結果として Nagaev の定理 [5],[6] が知られているので、参考のために述べておく。

まず次のような条件を考える。

(条件 N) (条件 F) が $\alpha > 0$ に対して成立し、さらに

$$|x|^{\alpha+2}F(x) \to 0, \qquad x \to -\infty$$

が成り立つ。

以下が Nagaev の定理である。

定理 9 (条件 N) および基本条件が成立すると仮定する。この時

$$\sup_{x\in[1,\infty)} \left|\frac{P(n^{-1/2}\sum_{k=1}^{n} X_k > x)}{\Phi(x)+n\bar{F}(n^{1/2}x)} - 1\right| \to 0, \qquad n \to \infty$$

が成り立つ。

伏屋-楠岡 [4] ではさらに以下のような条件を追加することでより精度の高い結果を得ている。

(条件 FK) $\bar{F} : \mathbf{R} \to [0,1]$ は 有界変動な密度関数を持つ。さらに $x_0 > 0$ が存在して $\bar{F}(x)$, $x \in (x_0, \infty)$, は C^2-級であり、$x \to \infty$ の時

$$x^2 \frac{d^2}{dx^2} \log \bar{F}(x) \to \alpha$$

が成り立つ。

例えば、以下のことが導かれている。

命題 10 (条件 N)、(条件 FK) および基本条件が成立すると仮定する。この時 $\beta : \mathbf{N} \to (0,\infty)$ が

$$\frac{\beta(n)}{(\log n)^{1/2}} \to \infty, \qquad n \to \infty$$

を満たすならば、

$$\sup_{x \geqq \beta(n)} x^2 \left| \frac{P(n^{-1/2}\sum_{k=1}^n X_k > x)}{n\bar{F}(n^{1/2}x)} - (1 + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2x^2}) \right| \to 0, \qquad n \to \infty$$

が成立する。

上記の命題より、Nagaev の定理における比と 1 との差は $x = (\log n)^s$, $s > 1/2$, においては $\alpha(\alpha+1)(\log n)^{-2s}/2$ 程度有り、収束がかなり緩慢であることがわかる。伏屋-楠岡 [4] では Nagaev の定理における差のオーダーが $n^{-\delta}$, $\delta > 0$, となる式を得ているが、命題はかなり複雑なのでここでは述べない。なお、Heavy tail を持つ場合の同分布を持つ独立確率変数の和については Borovkov-Borovkov [1] で詳しく述べられている。

4 VaR の推測の問題点

さて、以上の結果をふまえて、最初に掲げた問題、$p_M(x) = P(\sum_{k=1}^n X_k > x)$ の推定の問題を考えていく。まず、中心極限定理を根拠として X_1 の 平均 μ と分散 v を推定し $\Phi((Mv)^{-1/2}(x - M\mu))$ を確率 $p_M(X)$ の推定値とすることが考えられる。実際、20 年ほど前に金融機関で VaR の計測が行われ始めた頃この手法は用いられたが、余りよい推定値ではないことがわかり、現在ではほとんど用いられていないようである。そもそも独立確率変数の和に帰着できるのかという問題はあるが、それ以外のうまくいかない理由を考えてみると、(条件 C) が成立していないのではないかということが考えられる。このため、確率変数 X_1 の分布が heavy tail を持つ場合を考慮する必要がある。

Feller の定理をふまえて問題を考えてみる。(条件 F) が成立し $p_M(x)$ は $M\bar{F}(x)$ でよく近似されるとしよう。この時、例えば $p_M(x) = 0.05$ となる x を求めることは $\bar{F}(x) = 1/(20M)$ となる x を求めよという問題となる。ノンパラメトリックな統計推測を行う時は観測された N 個のデータ $X_{-N+1}, \ldots, X_0$ の上位 $N/(20M)$ 番目のものを推定値とすることになるかも知れないが、$N = 1000$ として、$M = 5$ ならば上位 10 番目の値、$M = 25$ ならば上位 2 番目の値、$M = 250$ に至ってはまだ見ぬデータの値を推定値とせざるを得ない。N が大きいにもかかわらず $N/(20M)$ は小さいので $M = 5$ の場合にもその推定値は極めて不安定になると思われる。また、$p_M(x) = 0.01$ となる x の値を推定することはさらに困難となる。

実際には (条件 F) が満たされるかどうかすらわからないので実務ではまず経験分布を ν (すなわち $\nu = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\delta_{X_{-k}}$) とし $\nu^{*M}((x,\infty))$ ($*M$ は M 回の covolution を表す) を $p_M(x)$ の推定値としていることが多いようである。しかし経験分布は裾野を打ち切ってしまうので、上記に述べた理由から (条件 F) が成立している場合はリスクを過小評価している可能性が高い。また、経験分布の convolution による方法はシミュレーション実験してみると推定値が極めて不安定であることが知られている。

なお、過小評価を防ぐために ν を経験分布だけでなく、さらに裾野を補外したものを付け加えたもので置き換えてはどうかという提案が乾孝治氏よりなされている。興味深いアイデアではあるが補外をどのように行うのがよいかは難しい問題のように思う。

Nagaev の定理等を用いて $p_M(x)$ を推定するには定理に現れる指数 α 等を推定する必要があるのでうまい方法が見つかっていない。このように小さい確率を統計的に精度良く推定することは同分布を持つ独立確率変数の和の場合でも、分布についての何らかの情報がなくクラメールの条件 (条件 C) が成り立たない場合は極めて難しい問題なのである。

5　付録 1：定理 6 の証明

まず定理 6 の証明のための準備を行う。

命題 11　$n \geqq 1$, $\lambda \in [-\lambda_0/2, \lambda_0/2]$ に対して $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の測度 $Q_{\lambda,n}$ を

$$Q_{\lambda,n}(A) = \exp(-nf(\lambda))E[\exp(\lambda \sum_{k=1}^{n} X_k), A], \qquad A \in \mathcal{F}$$

で定める。この時、 $Q_{\lambda,n}$ は確率測度であり、$X_1, \ldots, X_n$ は確率測度 $Q_{\lambda,n}$ の下で、同分布を持つ独立な確率変数となり、

$$E^{Q_{\lambda,n}}[X_1] = f'(\lambda), \quad E^{Q_{\lambda,n}}[(X_1 - f'(\lambda))^2] = f^{(2)}(\lambda) > 0, \qquad \lambda \in [-\lambda_0/2, \lambda_0/2]$$

が成立する。

証明. 確率測度であることは

$$Q_{\lambda,n}(\Omega) = \exp(-nf(\lambda))E[\exp(\lambda \sum_{k=1}^{n} X_k)] = \varphi(\lambda)^{-n} \prod_{k=1}^{n} E[\exp(\lambda X_k)] = 1$$

よりわかる。また、$\xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathbf{R}$ に対して

$$E^{Q_{\lambda,n}}[\exp(\sqrt{-1} \sum_{k=1}^{n} \xi_k X_k)] = \exp(-nf(\lambda))E[\exp(\sum_{k=1}^{n} (\sqrt{-1}\xi_k + \lambda) X_k)]$$

$$= \exp(-nf(\lambda)) \prod_{k=1}^{n} E[\exp((\sqrt{-1}\xi_k + \lambda) X_k)]$$

となる。特に、$k = 1, \ldots, n$, に対して $\xi_\ell = 0$, $\ell \neq k$, とおくと

$$E^{Q_{\lambda,n}}[\exp(\sqrt{-1}\xi_k X_k)] = \exp(-f(\lambda))E[\exp((\sqrt{-1}\xi_k + \lambda) X_k)]$$

がわかるので、

$$E^{Q_{\lambda,n}}[\exp(\sqrt{-1} \sum_{k=1}^{n} \xi_k X_k)] = \prod_{k=1}^{n} E^{Q_{\lambda,n}}[\exp(\sqrt{-1}\xi_k X_1)]$$

となり、カッツの定理より独立同分布であることがわかる。また、

$$E^{Q_{\lambda,n}}[X_1^m] = \varphi(\lambda)^{-1} \frac{d^n \varphi}{d\lambda^n}(\lambda)$$

より、

$$E^{Q_{\lambda,n}}[X_1] = \varphi(\lambda)^{-1} \varphi'(\lambda) = f'(\lambda)$$

$$E^{Q_{\lambda,n}}[X_1^2] - E^{Q_{\lambda,n}}[X_1]^2 = \varphi(\lambda)^{-1} \lambda''(\lambda) - \varphi(\lambda)^{-2} (\varphi'(\lambda))^2 = f^{(2)}(\lambda)$$

より主張を得る。

∎

$g_\lambda : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$, $\lambda \in [-\lambda_0/2, \lambda_0/2]$, を

$$g_\lambda(\xi) = E^{Q_{\lambda,n}}[\exp(\sqrt{-1}\xi(X_1 - f'(\lambda)))], \qquad \xi \in \mathbf{R}$$

で定める。この時、次が成立する。

命題 12 $c_1, c_2, c_3 \in (0, \infty)$ を

$$c_1 = \max_{\lambda \in [-\lambda_0/2, \lambda_0/2]} f^{(2)}(\lambda), \quad c_2 = \min_{\lambda \in [-\lambda_0/2, \lambda_0/2]} f^{(2)}(\lambda),$$

$$c_3 = \max_{\lambda \in [-\lambda_0/2, \lambda_0/2]} (|\varphi(\lambda)^{-1}\varphi^{(4)}(\lambda)|^{1/4} + |f'(\lambda)|)$$

で定める。さらに、$c_4, a_1, a_2 \in (0, \infty)$ を

$$c_4 = \frac{c_3^3}{6} + \frac{c_1^{3/2}}{4}, \quad a_1 = c_1^{-1/2}, \quad a_2 = a_1 \wedge ((4c_4)^{-1}c_2)$$

で定める。この時、$n \geqq 1$, $|\xi| \leqq a_2 n^{1/2}$ に対して

$$|g_\lambda(n^{-1/2}\xi)^n - \exp(-\frac{1}{2}f^{(2)}(\lambda)\xi^2)| \leqq c_4 n^{-1/2}|\xi|^3 \exp(-\frac{c_2}{4}\xi^2), \qquad \lambda \in [-\lambda_0/2, \lambda_0/2]$$

が成立する。

証明. まず、$t \in \mathbf{R}$ に対して、テーラーの公式より

$$\exp(\sqrt{-1}t) = 1 + \sqrt{-1}t - \int_0^t (t-s)\exp(\sqrt{-1}s)ds = 1 + \sqrt{-1}t - \frac{1}{2}t^2 - \sqrt{-1}\int_0^t \frac{(t-s)^2}{2}\exp(\sqrt{-1}s)ds$$

が成り立つので

$$|\exp(\sqrt{-1}t) - (1 + \sqrt{-1}t)| \leqq \frac{t^2}{2}$$

$$|\exp(\sqrt{-1}t) - (1 + \sqrt{-1}t - \frac{1}{2}t^2)| \leqq \frac{|t|^3}{6}$$

が成立する。よって、

$$|g_\lambda(\xi) - 1| = |E^{Q_{\lambda,n}}[\exp(\sqrt{-1}\xi(X_1 - f'(\lambda))) - (1 + \sqrt{-1}\xi(X_1 - f'(\lambda))]|$$

$$\leqq \frac{1}{2}E^{Q_{\lambda,n}}[(\xi(X_1 - f'(\lambda)))^2] = \frac{1}{2}f^{(2)}(\lambda)\xi^2 \leqq \frac{c_1}{2}\xi^2,$$

$$|g_\lambda(\xi) - (1 - \frac{1}{2}f^{(2)}(\lambda)\xi^2)|$$

$$= |E^{Q_{\lambda,n}}[\exp(\sqrt{-1}\xi(X_1 - f'(\lambda))) - (1 + \sqrt{-1}\xi(X_1 - f'(\lambda)) - \frac{1}{2}(\xi(X_1 - f'(\lambda)))^2]|$$

$$\leqq \frac{1}{6}E^{Q_{\lambda,n}}[|\xi(X_1 - f'(\lambda))|^3] \leqq \frac{1}{6}|\xi|^3 E^{Q_{\lambda,n}}[(X_1 - f'(\lambda))^4]^{3/4}$$

$$\leqq \frac{1}{6}|\xi|^3(E^{Q_{\lambda,n}}[X_1^4]^{1/4} + |f'(\lambda)|)^3 = \frac{1}{6}|\xi|^3(|\varphi(\lambda)^{-1}\varphi^{(4)}(\lambda)|^{1/4} + |f'(\lambda)|)^3 \leqq \frac{1}{6}c_3^3|\xi|^3$$

が成立する。よって、$|\xi| \leqq a_1$ ならば $|g_\lambda(\xi) - 1| \leqq 1/2$ となるので

$$|\log g_\lambda(\xi) + \frac{1}{2}f^{(2)}(\lambda)\xi^2| = |\sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k-1}}{k}(g_\lambda(\xi) - 1)^k + \frac{1}{2}f^{(2)}(\lambda)\xi^2|$$

$$\leqq |g_\lambda(\xi) - (1 - \frac{1}{2}f^{(2)}(\lambda)\xi^2)| + |g_\lambda(\xi) - 1|^2\frac{1}{2}\sum_{k=2}^\infty (\frac{1}{2})^{k-2} \leqq \frac{1}{6}c_3^3|\xi|^3 + \frac{c_1^2}{4}|\xi|^4 \leqq \frac{1}{6}c_3^3|\xi|^3 + \frac{c_1^2 a_1}{4}|\xi|^3 \leqq c_4|\xi|^3$$

となる。従って、$|\xi| \leqq a_2 n^{1/2} \leqq a_1 n^{1/2}$ ならば

$$|g_\lambda(n^{-1/2}\xi)^n - \exp(-\frac{1}{2}f^{(2)}(\lambda)\xi^2)| = \exp(-\frac{1}{2}f^{(2)}(\lambda)\xi^2)|\exp(n\log g_\lambda(n^{-1/2}\xi) + \frac{1}{2}f^{(2)}(\lambda)) - 1|$$

$$\leqq \exp(-\frac{1}{2}f^{(2)}(\lambda)\xi^2)(\exp(c_4 n^{-1/2}|\xi|^3)-1) \leqq \exp(-\frac{1}{2}c_2\xi^2)c_4 n^{-1/2}|\xi|^3\exp(c_4 n^{-1/2}|\xi|^3)$$

$$\leqq c_4 n^{-1/2}|\xi|^3\exp(-\frac{1}{2}c_2\xi^2)\exp(c_4 a_2|\xi|^2)$$

となり、主張を得る。

∎

命題 13 $m \geqq 2$ とする。$\psi \in C^2(\mathbf{R})$ は有界であり

$$\int_{-\infty}^{\infty}(|\psi(t)|+\sum_{k=1}^{m}|\psi^{(k)}(t)|)dt < \infty$$

を満たすとする。この時、

$$|E^{Q_{\lambda,n}}[\psi(n^{-1/2}\sum_{k=1}^{n}(X_k - f'(\lambda)))] - (\frac{1}{2\pi f^{(2)}(\lambda)})^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(t)\exp(-\frac{t^2}{2f^{(2)}(\lambda)})dt|$$

$$\leqq 16c_2^{-2}c_4 n^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(t)|dt + \frac{4}{m-1}a_2^{-(m-1)}n^{-(m-1)/2}\int_{-\infty}^{\infty}|\psi^{(m)}(t)|dt$$

が成立する。ここで、a_2, c_2, c_4 は前命題のものである。

証明. $u \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ を $\int_{\mathbf{R}} u(s)ds = 1$ を満たすものとし、

$$\psi_r(t) = u(r^{-1}t)\int_{-\infty}^{\infty}\psi(t-s)ru(rs)ds, \qquad t \in \mathbf{R},\ r \geqq 1,$$

とおくと、$\psi_r \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ であり $r \to \infty$ の時、$\psi_r(t) \to \psi(t)$, $t \in \mathbf{R}$,

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\psi_r^{(k)}(t)|dt \to \int_{-\infty}^{\infty}|\psi^{(k)}(t)|dt, \qquad k = 0, 1, \ldots, m$$

となるので、$\psi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ と仮定して証明すればよい。

$\hat{\psi}$ を ψ のフーリエ変換、すなわち、

$$\hat{\psi}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\sqrt{-1}\xi t)\psi(t)dt, \qquad \xi \in \mathbf{R}$$

とする。この時、

$$\psi(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(\sqrt{-1}\xi t)\hat{\psi}(\xi)d\xi \qquad t \in \mathbf{R}$$

が成立する。また、

$$(\sqrt{-1}\xi)^m\hat{\psi}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\sqrt{-1}\xi t)\psi^{(m)}(t)dt, \qquad \xi \in \mathbf{R}$$

が成立する。よって、

$$b_0 = \sup_{\xi \in \mathbf{R}}|\hat{\psi}(\xi)| \leqq \int_{-\infty}^{\infty}|\psi(t)|dt$$

$$b_1 = \sup_{\xi \in \mathbf{R}}|\xi|^m|\hat{\psi}(\xi)| \leqq \int_{-\infty}^{\infty}|\psi^{(m)}(t)|dt$$

が成立する。さて、

$$e(\lambda, n) = E^{Q_{\lambda,n}}[\psi(n^{-1/2}\sum_{k=1}^{n}(X_k - f'(\lambda)))]$$

とおくと、

$$e(\lambda,n) = E^{Q_{\lambda,n}}[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\psi}(\xi)\exp(\sqrt{-1}\xi n^{-1/2}\sum_{k=1}^{n}(X_k - f'(\lambda)))d\xi]$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\psi}(\xi)g_\lambda(n^{-1/2}\xi)^n d\xi$$

を得る。従って、

$$|e(\lambda,n) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\psi}(\xi)\exp(-\frac{1}{2}f^{(2)}(\lambda)\xi^2)d\xi| \leqq I_1 + I_2 + I_3$$

となる。ただし、

$$I_1 = |\int_{-a_2 n^{1/2}}^{a_2 n^{1/2}}\hat{\psi}(\xi)(g_\lambda(n^{-1/2}\xi)^n - \exp(-\frac{1}{2}f^{(2)}(\lambda)\xi^2))d\xi|,$$
$$I_2 = |\int_{a_2 n^{1/2}}^{\infty}\hat{\psi}(\xi)(g_\lambda(n^{-1/2}\xi)^n - \exp(-\frac{1}{2}f^{(2)}(\lambda)\xi^2))d\xi|,$$
$$I_3 = |\int_{-\infty}^{-a_2 n^{1/2}}\hat{\psi}(\xi)(g_\lambda(n^{-1/2}\xi)^n - \exp(-\frac{1}{2}f^{(2)}(\lambda)\xi^2))d\xi|$$

である。前命題より

$$I_1 \leqq \int_{-a_2 n^{1/2}}^{a_2 n^{1/2}} c_4 n^{-1/2}|\hat{\psi}(\xi)||\xi|^3\exp(-\frac{c_2}{4}\xi^2)d\xi$$
$$\leqq 2b_0 c_4 n^{-1/2}\int_0^{\infty}|\xi|^3\exp(-\frac{c_2}{4}\xi^2)d\xi = 16c_2^{-2}b_0 c_4 n^{-1/2}\int_0^{\infty} z\exp(-z)dz.$$

また、

$$I_2 \leqq 2\int_{a_2 n^{1/2}}^{\infty}|\xi|^{-m}|\xi|^m|\hat{\psi}(\xi)|d\xi \leqq \frac{2}{m-1}(a_2 n^{1/2})^{-(m-1)}b_1$$

となる。同様に $I_3 \leqq \frac{2}{m-1}(a_2 n^{1/2})^{-(m-1)}b_1$ がわかる。また、

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\psi}(\xi)\exp(-\frac{1}{2}f^{(2)}(\lambda)\xi^2)d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(t)\exp(-\sqrt{-1}\xi t)\exp(-\frac{1}{2}f^{(2)}(\lambda)\xi^2)d\xi$$
$$= (\frac{1}{2\pi f^{(2)}(\lambda)})^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(t)\exp(-\frac{t^2}{2f^{(2)}(\lambda)})dt$$

であるので主張を得る。

∎

命題 14 $\gamma > 0$, $m \geqq 2$ とし、$u \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ は $u \geqq 0$, $\int_{\mathbf{R}} u(t)dt = 1$, および $u(t) = 0$, $t \in (-\infty,-1] \cup [0,\infty)$, を満たすものとする。この時、$\varepsilon \in (0,1]$ に対して

$$|E^{Q_{\lambda,n}}[\exp(-\gamma n^{-1/2}\sum_{k=1}^{n}(X_k - f'(\lambda))), \sum_{k=1}^{n}(X_k - f'(\lambda)) > 0] - \exp(\frac{1}{2}f^{(2)}(\lambda)\gamma^2)\Phi(f^{(2)}(\lambda)^{1/2}\gamma)|$$
$$\leqq \exp(2\varepsilon\gamma)\{(\frac{1}{2\pi f^{(2)}(\lambda)})^{1/2}\varepsilon + 16c_2^{-2}c_4 n^{-1/2}\gamma^{-1} + \frac{4a_2^{-(m-1)}}{m-1}n^{-(m-1)/2}\gamma^{-1}\varepsilon^{-m}\int_0^1|u^{(m)}(t)|dt\}$$

が成立する。ここで、a_2, c_2, c_4 は命題 12 のものである。

証明. 今、$u_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ および $\tilde{\psi}:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ を

$$u_\varepsilon(t) = \varepsilon^{-1}u(\varepsilon^{-1}t), \quad \tilde{\psi}(t) = \exp(-\gamma t)1_{(0,\infty)}(t), \qquad t \in \mathbf{R}$$

で定め、さらに、$d(\varepsilon) \in (0,\infty)$ を

$$d(\varepsilon) = \int_0^1 \exp(\varepsilon\gamma t)u(t)dt = \int_0^\varepsilon \exp(\gamma t)\varepsilon^{-1}u(\varepsilon^{-1}t)dt$$

で定める。この時、

$$E^{Q_{\lambda,n}}[\exp(\gamma n^{-1/2}\sum_{k=1}^n (X_k - f'(\lambda))), \sum_{k=1}^n (X_k - f'(\lambda)) > 0] = E^{Q_{\lambda,n}}[\tilde{\psi}(n^{-1/2}\sum_{k=1}^n (X_k - f'(\lambda)))]$$

となる。また明らかに $1 \leqq d(\varepsilon) \leqq \exp(\varepsilon\gamma)$ である。今、$\psi_{0,\varepsilon} \in C^\infty(\mathbf{R})$ を

$$\psi_{0,\varepsilon}(t) = d(\varepsilon)^{-1}(\tilde{\psi} * u_\varepsilon)(t) = d(\varepsilon)^{-1}\int_{-\infty}^\infty \exp(-\gamma(t-s))1_{(0,\infty)}(t-s)\varepsilon^{-1}u(\varepsilon^{-1}s)ds$$

で定める。この時、

$$\psi_{0,\varepsilon}(t) = \exp(-\gamma t)d(\varepsilon)^{-1} \int_{(-\infty,t)\cap(0,\varepsilon)} \exp(\gamma s)\varepsilon^{-1}u(\varepsilon^{-1}s)ds$$

となるので、$t \leqq 0$ の時 $\psi_{0,\varepsilon}(t) = 0$, $t \geqq \varepsilon$ の時

$$\psi_{0,\varepsilon}(t) = \exp(-\gamma t)d(\varepsilon)^{-1} \int_{(0,\varepsilon)} \exp(\gamma s)\varepsilon^{-1}u(\varepsilon^{-1}s)ds = \exp(-\gamma t)$$

となる。また、$t \in (0,\varepsilon)$ の時、$0 \leqq \psi_{0,\varepsilon}(t) \leqq \exp(-\gamma t)$ となることもわかる。さらに、$\psi_{1,\varepsilon} \in C^\infty(\mathbf{R})$ を $\psi_{1,\varepsilon}(t) = \exp(\varepsilon\gamma)\psi_{0,\varepsilon}(t+\varepsilon)$ で定める。この時、$\psi_{0,\varepsilon}(t) \leqq \tilde{\psi}(t) \leqq \psi_{1,\varepsilon}(t)$, $t \in \mathbf{R}$, が成立する。さらに、

$$(\frac{1}{2\pi f^{(2)}(\lambda)})^{1/2}\int_{-\infty}^\infty \tilde{\psi}(t)\exp(-\frac{t^2}{2f^{(2)}(\lambda)})dt = (\frac{1}{2\pi})^{1/2}\int_0^\infty \exp(-f^{(2)}(\lambda)^{1/2}\gamma t)\exp(-\frac{t^2}{2})dt$$

$$= \exp(\frac{1}{2}f^{(2)}(\lambda)\gamma^2)(\frac{1}{2\pi})^{1/2}\int_0^\infty \exp(-\frac{1}{2}(t+f^{(2)}(\lambda)^{1/2}\gamma)^2)dt = \exp(\frac{1}{2}f^{(2)}(\lambda)\gamma^2)\Phi(f^{(2)}(\lambda)^{1/2}\gamma)$$

である。また、

$$(\frac{1}{2\pi f^{(2)}(\lambda)})^{1/2}\int_{-\infty}^\infty (\psi_{1,\varepsilon}(t) - \tilde{\psi}(t))\exp(-\frac{t^2}{2f^{(2)}(\lambda)})dt \leqq (\frac{1}{2\pi f^{(2)}(\lambda)})^{1/2}\varepsilon\exp(\varepsilon\gamma),$$

$$(\frac{1}{2\pi f^{(2)}(\lambda)})^{1/2}\int_{-\infty}^\infty (\tilde{\psi}(t) - \psi_{0,\varepsilon}(t))\exp(-\frac{t^2}{2f^{(2)}(\lambda)})dt \leqq (\frac{1}{2\pi f^{(2)}(\lambda)})^{1/2}\varepsilon$$

が成立する。$k = 0, m$ に対して

$$|\psi_{0,\varepsilon}^{(k)}(t)| = d(\varepsilon)^{-1}|(\tilde{\psi} * u_\varepsilon^{(k)})(t)| \leqq d(\varepsilon)^{-1}\int_{-\infty}^\infty \exp(-\gamma(t-s))1_{(0,\infty)}(t-s)\varepsilon^{-(k+1)}|u^{(k)}(\varepsilon^{-1}s)|ds$$

$$\leqq \exp(\varepsilon\gamma)\exp(-\gamma t)1_{(0,\infty)}(t)\varepsilon^{-k}\int_0^1 |u^{(k)}(s)|ds$$

であるので、

$$\int_{-\infty}^\infty |\psi_{0,\varepsilon}^{(k)}(t)|dt \leqq \gamma^{-1}\varepsilon^{-k}\exp(\varepsilon\gamma)\int_0^1 |u^{(k)}(t)|dt$$

が成り立つ。また、同様にして

$$\int_{-\infty}^\infty |\psi_{1,\varepsilon}^{(k)}(t)|dt \leqq \gamma^{-1}\varepsilon^{-k}\exp(2\varepsilon\gamma)\int_0^1 |u^{(k)}(t)|dt$$

が示される。

よって、前命題より主張を得る。

∎

以下では定理 6 の証明を行う。

$\varepsilon = n^{-\alpha} \in (0,1]$ とおく。また、$m \geqq 2$ を $(m-1)/2 \geqq (m+1)\alpha$ を満たすように十分大きく取り固定する。この時、$\varepsilon^{-m} n^{-(m-1)/2} \leqq n^{-\alpha}$ となる。さらに $u \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ は $u \geqq 0$, $\int_{\mathbf{R}} u(t)dt = 1$, および $u(t) = 0$, $t \in (-\infty, -1] \cup [0, \infty)$, を満たすものとする。

命題 14 より $\lambda \in [0, \lambda_0/2]$ に対して $\gamma = n^{1/2}\lambda$ とおくことにより

$$|E^{Q_{\lambda,n}}[\exp(-(n^{1/2}\lambda)n^{-1/2}\sum_{k=1}^n (X_k - f'(\lambda))), \sum_{k=1}^n (X_k - f'(\lambda)) > 0]$$

$$-\exp(n\frac{1}{2}f^{(2)}(\lambda)\lambda^2)\Phi(f^{(2)}(\lambda)^{1/2}n^{1/2}\lambda)|$$

$$\leqq \exp(2n^{-\alpha}n^{1/2}\lambda)\{(\frac{1}{2\pi f^{(2)}(\lambda)})^{1/2}n^{-\alpha} + C_1 n^{-1/2}(n^{1/2}\lambda)^{-1} + C_2 n^{-\alpha}(n^{1/2}\lambda)^{-1}\}$$

$$\leqq \exp(2n^{-\alpha}n^{1/2}\lambda)\{\frac{1}{2\pi f^{(2)}(\lambda)})^{1/2}n^{-\alpha} + (C_1 + C_2)n^{-\alpha}(n^{1/2}\lambda)^{-1}\} \tag{1}$$

が成立する。ただし、

$$C_1 = 16c_2^{-2}c_4$$

$$C_2 = \frac{4}{m-1}a_2^{-(m-1)}\int_0^1 |u^{(m)}(t)|dt$$

である。$\lambda \in [0, \lambda_0/2]$ に対して

$$P(\sum_{k=1}^n X_k > nf'(\lambda)) = \exp(nf(\lambda))E^{Q_{\lambda,n}}[\exp(-\lambda\sum_{k=1}^n X_k), \sum_{k=1}^n X_k > nf'(\lambda)]$$

$$= \exp(n(f(\lambda) - \lambda f'(\lambda)))E^{Q_{\lambda,n}}[\exp(-n^{1/2}\lambda n^{-1/2}\sum_{k=1}^n (X_k - f'(\lambda))), \sum_{k=1}^n (X_k - f'(\lambda)) > 0]$$

となる。よって、$\lambda = I(n^{-1/2}x)$, $x \in (0, a_2 n^{1/2}]$, とすると

$$P(n^{-1/2}\sum_{k=1}^n X_k > x) = P(\sum_{k=1}^n X_k > nf'(I(n^{-1/2}x)))$$

$$= \exp(n(f(I(n^{-1/2}x)) - I(n^{-1/2}x)f'(I(n^{-1/2}x)))$$

$$\times E^{Q_{I(n^{-1/2}x),n}}[\exp(-n^{1/2}I(n^{-1/2}x)(n^{-1/2}\sum_{k=1}^n (X_k - f'(I(n^{-1/2}x)))), \sum_{k=1}^n (X_k - f'(I(n^{-1/2}x))) > 0]$$

となる。$f^{(2)}(I(n^{-1/2}x)) = I'(n^{-1/2}x)^{-1}$ より $f^{(2)}(I(n^{-1/2}x))^{1/2}n^{1/2}I(n^{-1/2}x) = n^{1/2}H(n^{-1/2}x)$ となるので、

$$\exp(n(f(I(n^{-1/2}x)) - I(n^{-1/2}x)f'(I(n^{-1/2}x)))$$

$$\times \exp(\frac{1}{2}f^{(2)}(I(n^{-1/2}x))(n^{1/2}I(n^{-1/2}x))^2)\Phi(f^{(2)}(I(n^{-1/2}x))^{1/2}(n^{1/2}I(n^{-1/2}x)))$$

$$= \exp(nF(n^{-1/2}x))\Phi(n^{1/2}H(n^{-1/2}x))$$

となる。よって、式 (1) より

$$|P(n^{-1/2}\sum_{k=1}^{n}X_k > x) - \exp(nF(n^{-1/2}x))\Phi(n^{1/2}H(n^{-1/2}x))|$$

$$\leqq \exp(nF(n^{-1/2}x) - \frac{1}{2}nH(n^{-1/2}x)^2)\exp(2n^{-\alpha}n^{1/2}I(n^{-1/2}x))$$

$$\times\{(\frac{I'(n^{-1/2}x)}{2\pi})^{1/2}n^{-\alpha} + (C_1+C_2)n^{-\alpha}(n^{1/2}I(n^{-1/2}x))^{-1}\} \tag{2}$$

となる。命題 1 より

$$\Phi(n^{1/2}H(n^{-1/2}x))^{-1} \leqq \exp(\frac{1}{2}nH(n^{-1/2}x)^2)(2\pi)^{1/2}n^{1/2}H(n^{-1/2}x)(1+(n^{1/2}H(n^{-1/2}x))^{-2})$$

であるので

$$|(\exp(-nF(n^{-1/2}x))\Phi(H(I(n^{-1/2}x)))^{-1}P(n^{-1/2}\sum_{k=1}^{n}X_k > x) - 1|$$

$$\leqq (2\pi)^{1/2}n^{1/2}H(n^{-1/2}x)(1+(n^{1/2}H(n^{-1/2}x))^{-2})\exp(2n^{-\alpha}n^{1/2}I(n^{-1/2}x))$$

$$\times\{(\frac{I'(n^{-1/2}x)}{2\pi})^{1/2}n^{-\alpha} + (C_1+C_2)n^{-\alpha}(n^{1/2}I(n^{-1/2}I(x))^{-1}\}$$

$$= (2\pi)^{1/2}I'(n^{-1/2}x)^{-1/2}\exp(2n^{-\alpha}n^{1/2}I(n^{-1/2}x))(1+(n^{1/2}H(n^{-1/2}x))^{-2})$$

$$\times\{(\frac{I'(n^{-1/2}x)}{2\pi})^{1/2}n^{-\alpha}(n^{1/2}I(n^{-1/2}x)) + (C_1+C_2)n^{-\alpha}\}$$

を得る。$x \in [1, an^{\alpha}]$, $n \geqq (2a/\lambda_0)^{(1/2-\alpha)^{-1}}$ ならば $n^{-1/2}x \leqq \lambda_0/2$ となるので、命題 5 より

$$I'(n^{-1/2}x)^{-1/2} \leqq \min_{\lambda\in[0,\lambda_0/2]} I'(\lambda))^{-1/2},$$

$$n^{1/2}I(n^{-1/2}x) \leqq x \max_{\lambda\in[0,\lambda_0/2]} I'(\lambda)$$

となり、$C_3 \in (0,\infty)$ が存在して

$$|(\exp(-nF(n^{-1/2}x))\Phi(H(I(n^{-1/2}x)))^{-1}P(n^{-1/2}\sum_{k=1}^{n}X_k > x) - 1| \leqq C_3(1+x)n^{-\alpha}$$

がすべての $n \geqq (a/a_2)^{1/2-\lambda}$, $x \in [1, an^{\alpha}]$ に対して成立することがわかる。$x \in [0,1]$ の時は式 (2) より容易にわかる。これより定理を得る。

6 付録 2： 定理 6 に関する若干の注意

$f^{(k)}(0)$, $k = 1, 2, \ldots,$ は確率変数 X_1 の k 次キュミュラントである。

命題 15 $m \geqq 3$ とし、$f^{(k)}(0) = 0$, $k = 3, \ldots, m-1$, $f^{(m)}(0) \neq 0$ と仮定する。この時、$I^{(k)}(0) = 0$, $k = 2, \ldots, m-2$, $I^{(m-1)}(0) = -f^{(m)}(0) \neq 0$, $H^{(k)}(x) = 0$, $k = 2, \ldots, m-2$, $H^{(m-1)}(0) = (1/2)f^{(m)}(0) \neq 0$ および $F^{(k)}(0) = 0$, $k = 3, \ldots, m-1$, $F^{(m)}(0) = (1/2)f^{(m)}(0) \neq 0$ となる。

証明. 命題 5 より $I'(x) = f^{(2)}(I(x))^{-1}$ であるので、$I^{(2)}(x) = -I'(x)^2 f^{(3)}(I(x))$ となる。よって、$I^{(k)}(0) = 0$, $k = 2, \ldots, m-2$, $I^{(m-1)}(0) = -f^{(m)}(0) \neq 0$ となることがわかる。また、命題 5 の証明より

$$H^{(2)}(x) = -\frac{1}{2}\frac{d}{dx}(I'(x)^{-3/2}I^{(2)}(x))I(x) = -\frac{1}{2}I(x)I^{(3)}(x)I'(x)^{-3/2} + \frac{3}{4}I(x)I^{(2)}(x)I'(x)^{-5/2}$$

$$F'(x) = -\frac{1}{2}I'(x)^{-2}I^{(2)(x)}I(x)^2$$

であるので、$H^{(k)}(x) = 0,\ k = 2,\dots,m-2,\ H^{(m-1)}(0) = -(1/2)I^{(m-1)}(0)$ および $F^{(k)}(0) = 0,\ k = 3,\dots,m-1,\ F^{(m)}(0) = -(1/2)I^{(m-1)}(0)$ となることも容易にわかる。

∎

キュムラントが $m-1$ 次まで消えていると仮定しよう。上記命題より $C_0 \in (0,\infty)$ が存在して

$$|n^{1/2}H(n^{-1/2}x) - x(1+\frac{1}{(m-1)!}f^{(m)}(0)(n^{-1/2}x)^{m-2})| \leqq C_0 n^{-(m-1)/2}|x|^m,$$

$$|nF(n^{-1/2}x) - \frac{1}{(m-1)!}f^{(m)}(0)n^{-(m-2)/2}x^m| \leqq C_0 n^{-(m-1)/2}|x|^{m+1}$$

$x \in [-f'(-\lambda_0/2), f(\lambda_0/2)]$, が成立する。

$$\frac{d}{dx}\log\Phi(x) = -\Phi(x)^{-1}(\frac{1}{2\pi})^{1/2}\exp(-\frac{x^2}{2})$$

であるので、命題 1 より

$$|\frac{d}{dx}\log\Phi(x) + x| \leqq 1 + x^{-2} \leqq 2 \qquad x \geqq 1$$

となる。よって、n が大きい時、

$$|\log P(n^{-1/2}\sum_{k=1}^n X_k > x) - \log\Phi(x)|$$

$$\leqq |\log P(n^{-1/2}\sum_{k=1}^n X_k > x) - \log(\exp(nF(n^{-1/2}x)\Phi(n^{1/2}H(n^{-1/2}x))|$$

$$+|nF(n^{-1/2}x) + \log\Phi(n^{1/2}H(n^{-1/2}x)) - \log\Phi(x)|$$

であるので、$= O(n^{-(m-2)/(2m)}x)$ となる。

また再び命題 1 より

$$|\log(\exp(nF(n^{-1/2}x))\Phi(n^{1/2}H(n^{-1/2}x)) - (nF(n^{-1/2}x)) + \frac{1}{2}(n^{1/2}H(n^{-1/2}x))^2 + \frac{1}{2}\log(2\pi) + \log(n^{1/2}H(n^{-1/2}x))|$$

$$\leqq \log(1 + n^{-1}H(n^{1/2}x)^{-2})$$

であり、

$$|nF(n^{-1/2}x)) + \frac{1}{2}(n^{1/2}H(n^{-1/2}x))^2 + \frac{1}{2}x^2| \leqq C_1 n^{-(m-1)/2}|x|^{m+1}$$

であるので、

$$|\log(\exp(nF(n^{-1/2}x))\Phi(n^{1/2}H(n^{-1/2}x)) - \log\Phi(x)|$$

$$\leqq C_2(|x|^{-2} + n^{-(m-1)/2}|x|^{m+1})$$

となる。これらのことより、n が十分大きく、$x << n^{(m-1)/(2(m+1))}$ の時は $|\Phi(x)^{-1}P(n^{-1/2}\sum_{k=1}^n X_k > x) - 1|$ は小さいと言える。

7 付録 3: 数値実験結果

数学においては、極限でどうなるかという命題が多い。そのため、実際の $M = 5, 20$ といった時にどの程度近いかはよくわからない。ここでは、(条件 C) が成立する場合および heavy tail の場合それぞれについて述べられた定理や命題がどの程度の精度を持つかを数値実験で調べる。$\tilde{X}_n$, $n = 1, 2, \ldots,$ は同分布をもつ独立確率変数列でその分布は密度関数 $\tilde{\rho}$ を持つとする。さらに

$$\int_{\mathbf{R}} x^2 \tilde{\rho}(x) dx < \infty$$

と仮定する。この時、

$$\mu = \int_{\mathbf{R}} x\tilde{\rho}(x)dx, \quad v = \int_{\mathbf{R}} (x-\mu)^2 \tilde{\rho}(x)dx = \int_{\mathbf{R}} x^2 \tilde{\rho}(x)dx - (\int_{\mathbf{R}} x\tilde{\rho}(x)dx)^2$$

とし、

$$X_n = v^{-1/2}(\tilde{X}_n - \mu)$$

とおくと X_n, $n = 1, 2, \ldots,$ は基本条件を満たす同分布をもつ独立確率変数列となり、X_n の分布は密度関数 $\rho(x) = v^{1/2}\tilde{\rho}(v^{1/2}(x+\mu))$ を持つ。以下では

$$p_M(x) = P(M^{-1/2}\sum_{k=1}^{M} X_k > x), \qquad x > 0$$

とし、$z \in (0, 1)$ に対して $x_M(z)$ を $p_M(x_M(z)) = z$ の解とする。以下の場合に数値計算実験を行う。

(1) (条件 C) が成立する場合

この時は、 $z^{-1}\Phi(x_M(z))$, $z \geqq 0.9$ の形状を見る。

例 1-1. $\tilde{\rho}$ を

$$\tilde{\rho}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\exp(x), & x < 0, \\ \frac{1}{2}\exp(-x), & x \geqq 0 \end{cases}$$

で与える。この時、 $\mu = 0$, $v = 2$ となる。この時のグラフがグラフ 1-1 である。

例 1-2. $\tilde{\rho}$ を

$$\tilde{\rho}(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}\exp(x), & x < 0, \\ \frac{1}{3}\exp(-x), & x \geqq 0 \end{cases}$$

で与える。この時、 $\mu = -1/3$, $v = 17/9$ となる。この時のグラフがグラフ 1-2 である。

(2) (条件 N), (条件 FK) が成立する場合

この時は、$z^{-1}\Phi(x_M(z))$ （曲線 1）、$z^{-1}M\bar{F}(x_M(z))$ (曲線 2)、$z^{-1}(\Phi(x_M(z)) + M\bar{F}(x_M(z)))$ (曲線 3)、$z^{-1}(1 + \alpha(\alpha+1)M/(2x_M(z)^2))\bar{F}(x_M(z))$ (曲線 4)、 $z \geqq 0.9$, の形状を見る。

例 2-1. $\tilde{\rho}$ を

$$\tilde{\rho}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\exp(x), & x < 0, \\ \frac{3}{2}(1+x)^{-4}, & x \geqq 0 \end{cases}$$

で与える。この時、 $\mu = -1/4$, $v = 23/16$, $\bar{F}(x) = (1/2)(1+x)^{-3}$, $\alpha = 3$, となる。

例 2-2. $\tilde{\rho}$ を

$$\tilde{\rho}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\exp(x), & x < 0, \\ 5(1+x)^{-11}, & x \geqq 0 \end{cases}$$

で与える。この時、 $\mu = -4/9$, $v = 1 - 55/9^2 8$, $\bar{F}(x) = (1/2)(1+x)^{-10}$, $\alpha = 10$, となる。なお、グラフでは曲線 1 と曲線 3 がほぼ重なっている。

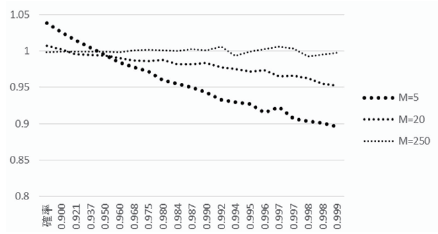

図 1: 例 1-1　M-5,20,250

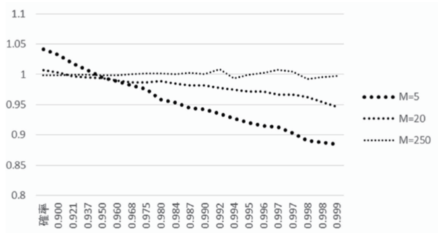

図 2: 例 1-2　M-5,20,250

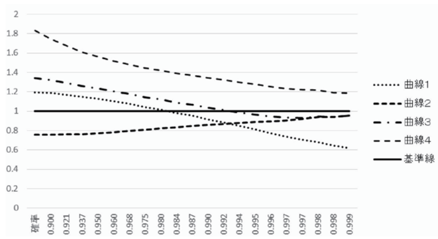

図 3: 例 2-1　M=5

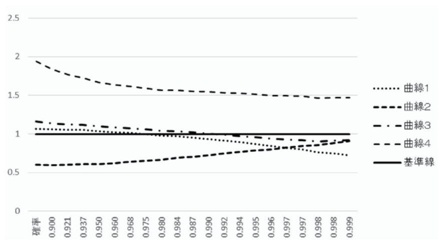

図 4: 例 2-1　 M=20

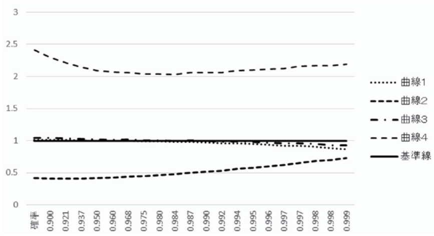

図 5: 例 2-1　 M=250

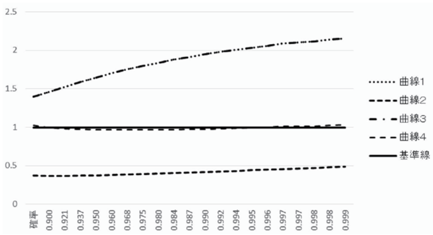

図 6: 例 2-2　M=5

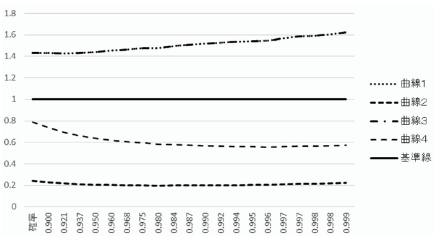

図 7: 例 2-2　 M=20

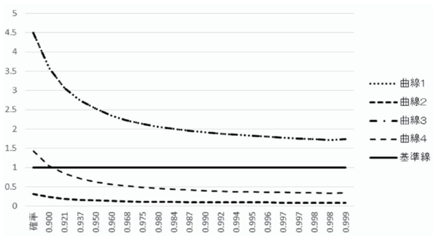

図 8: 例 2-2　 M=250

参考文献

[1] Borovkov, A., and K. Borovkov, Asyptotic Analysis of Random Walks: Heavy Tailed Distributions, Cambridge University Press 2008, Cambridge.

[2] Cramér, H., Sur un nouveau theoreme limite de la probabilites. Actualites Sci. In- dust. No. 736 (1938), 5-23.

[3] Feller, W., An Introduction to Probability Theory and Its Applications Vol. 2, John Wiley & Sons, Inc.; 2nd edition, 1971.

[4] Fushiya, H., and S.Kusuoka, Uniform Estimate for distributions of the sum of i.i.d. random variables with fat tail, J. Math. Sci. Univ. Tokyo 17(2010), 79-121

[5] Nagaev, S. V., Large deviations of sums of independent random variables, Ann. Probab. 7(1979), 745-789.

[6] Nagaev, S. V., On large deviations for sums of independent random variables, Doctoral dissertations, Institute of Mathematics, Tashkent, 1970.

[7] Williams, D., *Probability with Martingales,* Cambridge University Press 1991, Cambridge.