
研究論文

長寿リスク評価へのベイズ統計モデリング

橋川 研史* 小暮 厚之† 倉知 善行‡

2007年10月31日投稿

2008年3月24日受理

概要

伝統的な保険の考え方では、大数法則により人口集団における死亡確率の不確実性は無視できると仮定されてきた。しかし、近年全世界的に観測されている高年齢世代の死亡率の低下は、大数法則では除去できない将来死亡率の不確実性（いわゆる長寿リスク）を引き起こしている*1。本稿では、長寿リスクの影響を評価する新たな枠組みとして、将来死亡率の代表的予測モデルである Lee-Carter 法のベイズ・モデリングを試みる。特に、年金リスクに最も大きな影響を与える暦年パラメータに関する3つのシナリオを考察する。我が国死亡データに対してこのベイズモデルを適用し、年金価値の事後予測分布を通じて長寿リスクを評価する。

キーワード：将来死亡率、長寿リスク、Lee-Carter 法、ベイズ・モデリング、MCMC 法、周辺尤度、年金

1 はじめに

戦後我が国の死亡率は一貫して減少している。特に、図1に見るように高年齢者の死亡率低下の度合いが著しい。このような死亡率の時間的変動は、大数法則を前提とした従来の年金リスク評価の限界を浮き彫りにしている。本稿では、長寿リスクの影響を評価するために、将来死亡率の時間変動を記述する Lee-Carter モデルを考察する。Lee-Carter 法は、将来死亡率の代表的予測手法であり広く利用されている。しかし、その適用においては、予測誤差を過小評価など実際の不確実性を十分に反映していないという指摘がなされている。本稿では、推定と予測における複雑なパラメータ不確実性に対応するために、ベイズ・モデルを用いて我が国の将来死亡率を予測する。ベイズ・アプローチの枠組みにおいて、我が国死亡率の将来の時間的変動に関する3つのシナリオを比較する。さらに、各シナリオの実際的な意味を年金リスクを通じて数量的に評価する。

2 死亡率の定義

死亡データの実証分析では、死力、死亡率、粗死亡率などいくつかのよく似た概念が用いられる。ここでは、それらを整理しておく。

* 大和証券 SMBC 株式会社 E-mail: kenji.kitsukawa@daiwasmbc.co.jp

† 慶應義塾大学 総合政策学部 E-mail: kogure@sfc.keio.ac.jp

‡ 東京大学大学院 経済学研究科金融システム専攻

*1 例えば、Olivieri(2001), Pitacco(2004) を参照されたい。

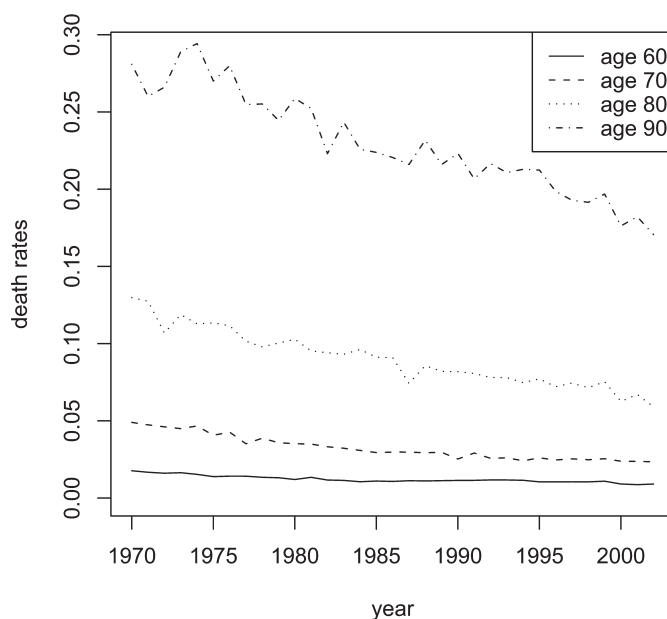


図1 年齢別死亡率 (国勢調査及び人口動態統計に基づく粗死亡率) の1970年から2003年にかけての推移

死力 $\mu_x(t)$ は時点 t において x 歳の人が次の瞬間に死亡する可能性を表す. 十分小さい dt に対して, $\mu_x(t)dt$ は区間 $[t, t + dt)$ における死亡確率を与える. 一方, 死亡率 $q_x(t)$ は時点 t に x 歳の人が1年以内に死亡する確率である. それは死力によって

$$q_x(t) = 1 - \exp \left\{ - \int_0^1 \mu_{x+s}(t+s) ds \right\} \quad (1)$$

と表現される.

実際の分析では, 死力や死亡率の代わりに, 粗死亡率の概念を用いることが多い. 時点 t から時点 $t+1$ までの時間間隔を暦年 t と呼ぶことにすると, 暦年 t における x 歳の粗死亡率は

$$m_x(t) \equiv \frac{\text{直前の誕生日で } x \text{ 歳になった人の暦年 } t \text{ における死亡数}}{\text{直前の誕生日で } x \text{ 歳になった人の暦年 } t \text{ 年における平均人口}} \quad (2)$$

と定義される.

本稿では, Brouhns et al (2002a) にならって, 死力に関して次の仮定を置く:

仮定: 任意の整数 t , 整数 x 及びすべての $0 \leq s, u \leq 1$ に対して:

$$\mu_{x+u}(t+s) = \mu_x(t)$$

すなわち, 死力は各年齢及び各暦年に対して一定と仮定する. この仮定から, 粗死亡率は死力に等しくなり,

$$m_x(t) = \mu_x(t) \quad (3)$$

が成立する. また, (1) より, 暦年 t において x 歳の人が1年以内に死亡する確率は,

$$q_x(t) = 1 - \exp \{-m_x(t)\} \quad (4)$$

と与えられる. 粗死亡率 $m_x(t)$ が小さければ, 死亡率 $q_x(t)$ は粗死亡率にほぼ等しいことに注意されたい.

粗死亡率 $m_x(t)$ に対応する実際のデータの観察死亡率は

$$m_{xt} \equiv \frac{D_{xt}}{E_{xt}}$$

である。ここで、 D_{xt} は x 歳の人々の t 年における実際の死亡数、 E_{xt} は対応するエクスポージャーである。 E_{xt} として、しばしば暦年 t の中央日における x 歳の人口が採用される。以下の図 2 は、各年齢に対する我が国の観察死亡率の対数値の 1970 年から 2003 年までの推移を表す。

3 Lee-Carter 法

本節では、標準的な Lee-Carter 法について簡潔に説明する。

3.1 死力のモデリング

Lee-Carter 法では、 x 歳の人々の時点 t における死力が

$$\mu_x(t) = \exp \{ \alpha_x + \beta_x \kappa_t \} \quad (5)$$

と表現できると仮定する。ここで、 α_x 、 β_x 、 κ_t は実際の死亡率データから推定すべきパラメータである。 κ_t は各年齢に共通な死亡率の暦年効果、 β_x は暦年効果に対する各年齢ごとの感応度、 α_x は暦年効果に影響されない年齢のみの効果を表す。このとき、(3) より Lee-Carter 法の粗死亡率は

$$m_x(t) = \exp \{ \alpha_x + \beta_x \kappa_t \} \quad (6)$$

と与えられる。

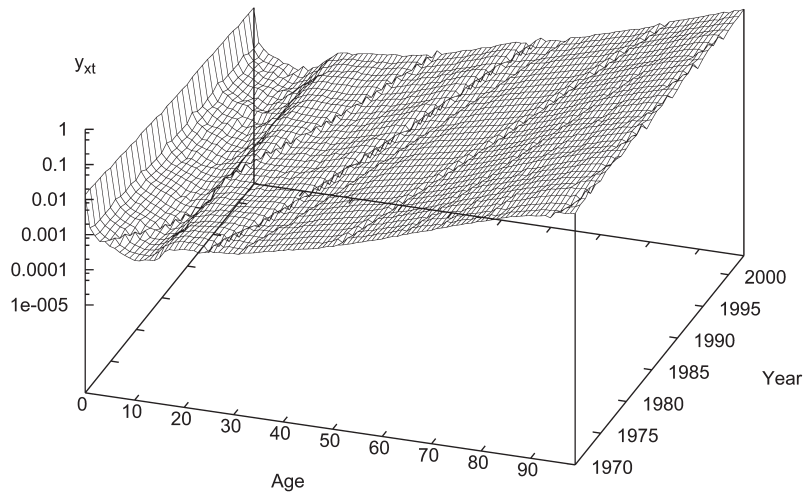


図 2 0 歳から 98 歳までの年齢及び年齢別対数死亡率 $y_{xt} = \ln m_{xt}$ の 1970 年から 2003 年にかけての推移

3.2 Lee-Carter モデルの構築

Lee-Carter 法の標準的な構築は

- ステップ 1：推定プロセス
死亡データに統計モデルを仮定し、パラメータを最尤法により推定
- ステップ 2：予測プロセス
推定された κ_t に時系列モデルを対応させて将来の κ_t を予測

という 2 つのステップに分かれる。

オリジナルな Lee-Carter 法は、ステップ 1 の統計モデルとして、(6) に基づいて、観察死亡率 m_{xt} の対数値 $y_{xt} \equiv \ln m_{xt}$ が

$$y_{xt} = \alpha_x + \beta_x \kappa_t + \varepsilon_{xt} \quad (x = x_{\min}, x_{\min} + 1, \dots, x_{\max}; t = t_{\min}, t_{\min} + 1, \dots, t_{\max}) \quad (7)$$

という回帰モデルを提案した。ここで、 ε_{xt} は誤差項であり、平均がゼロ、分散が一定の正規分布に互いに独立に従うと仮定される。回帰モデル (7) は、 β_x と κ_t が共にパラメータである双線形なモデルのため、このままでは β_x と κ_t を識別できない。パラメータを識別可能とするために、パラメータ間に

$$\sum_{x=x_{\min}}^{x_{\max}} \beta_x = 1, \quad \sum_{t=t_{\min}}^{t_{\max}} \kappa_t = 0 \quad (8)$$

という制約を課する。

正規回帰モデル (7) は、対数死亡率 y_{xt} の分散が年齢 x や暦年 t に関わらず均一であるということが暗黙の前提となっている。しかし、年齢が異なる死亡率の分散が一定であるという仮定は非現実的であろう。例えば、高年齢になるほど、各年齢のエクスポージャー E_{xt} が小さくなり、それに連れて分散も大きくなると考えられる。この点を克服するために、Brouhns et al. (2002a) は、観察死亡数 D_{xt} が平均 $E_{xt}\mu_x(t)$ を持つポアソン分布

$$f(D_{xt} | \alpha_x, \beta_t, \kappa_t) \equiv \frac{\exp\{-E_{xt}\mu_x(t)\} (E_{xt}\mu_x(t))^{D_{xt}}}{D_{xt}!}, \quad \ln \mu_x(t) = \alpha_x + \beta_x \kappa_t \quad (9)$$

に従うというポアソンモデルを提案した*2。ただし、正規モデルと同様に、パラメータ識別性のために、(8) の制約を置く。

ステップ 2 の予測プロセスにおけるモデリングは、将来死亡率の変動のシナリオを描くことである。 κ_t のモデリングは将来死亡率の予測に直接的な影響を与える。Lee and Carter (1992) は、ステップ 1 において推定された κ_t の推定値の時系列に対して、標準的な ARIMA モデルを適用することを提唱しているが、多くのケースでは、 κ_t のダイナミクスは、確率的トレンドモデル (ランダム・ウォーク)

$$\kappa_t = \lambda + \kappa_{t-1} + \omega_t \quad (10)$$

によって記述できるとしている。ここで、 λ はパラメータであり、 ω_t は平均がゼロ、分散が σ_ω^2 の正規ホワイトノイズである。*3。

*2 Renshaw and Haberman (2003) も同様な提案を行っている。

*3 正規モデル及びポアソンモデルに基づく我が国死亡率データに対する応用については、例えば小暮・長谷川 (2007) を参照されたい。

4 ベイズ・モデリング

前節で述べたように、標準的な Lee-Carter 法には、モデルのパラメータの推定誤差と予測誤差が混在する。Brouhns, Denuit, Vermunt (2002b) は、この推定と予測が絡み合う複雑な誤差を考慮して、ブートストラップ法に基づくモデルの評価を提案している。しかし、我が国への適用例において同様な手法を試みた小暮・長谷川 (2008) の結果を見る限り、そのようなアプローチによって2つの誤差が十分に表現されているようには思われない。そのため、本稿では頻度論に基づく標準的な Lee-Carter 法に代わり、ベイズ法によるアプローチを試みる。ベイズ法では、各パラメータに対する事前分布を導入することにより、パラメータ不確実性に対処する。また、推定プロセスと予測プロセスを同一の枠組みで統一的に扱うため、モデル誤差の評価をより有効に行うことが可能となる。Lee-Carter 法のベイズ・アプローチによる分析手法は、Czado, Delwarde and Denuit (2005) 及び Pedroza (2006) で提案されている。本稿の目的は、それらで提案された推定モデル含む複数のベイズ・モデリングが年金評価に与える影響を比較する点にある。

4.1 状態空間モデル

対数死亡率からなるベクトルを $\mathbf{y}_t \equiv (y_{x_{\min}t}, \dots, y_{x_{\max}t})'$ とすると、オリジナルな Lee-Carter モデルは、状態空間モデル

$$\text{観測方程式: } \mathbf{y}_t = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}\kappa_t + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_t \stackrel{\text{iid}}{\sim} N_M(\mathbf{0}, \sigma_\varepsilon^2 \mathbf{I}_M) \quad (11)$$

$$\text{遷移方程式: } \kappa_t = \lambda + \kappa_{t-1} + \omega_t, \quad \omega_t \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, \sigma_\omega^2) \quad (12)$$

として表現できる (Pedroza, 2006)。ここで、 $\boldsymbol{\alpha} \equiv (\alpha_{x_{\min}}, \dots, \alpha_{x_{\max}})'$ 、 $\boldsymbol{\beta} \equiv (\beta_{x_{\min}}, \dots, \beta_{x_{\max}})'$ 、 $M \equiv x_{\max} - x_{\min} + 1$ である。また、 \mathbf{I}_M は大きさ $M \times M$ の単位行列である。

(11) は、正規モデル (7) をまとめてベクトルとして表現した式であり、(12) は、確率的トレンドモデル (10) そのものである。本稿では、観測方程式として、正規モデル (11) に加え、(9) のポアソンモデルを取り上げる。また、遷移方程式として、確率的トレンドモデル (12) に加え、Czado, Delwarde and Denuit (2005) で提案された確定的トレンドモデル

$$\kappa_t - (\gamma_1 + \gamma_2 t) = \rho \{ \kappa_{t-1} - (\gamma_1 + \gamma_2(t-1)) \} + \omega_t, \quad |\rho| < 1, \quad \omega_t \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, \sigma_\omega^2) \quad (13)$$

を考える。ここで、 ρ 、 γ_1 、 γ_2 はパラメータである。また、これら2つのトレンドモデルとの対比のために、確定的トレンドモデルにおいて、 $\gamma_2 = 0$ のときに得られる定常モデル

$$\kappa_t - \gamma_1 = \rho(\kappa_{t-1} - \gamma_1) + \omega_t, \quad |\rho| < 1, \quad \omega_t \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, \sigma_\omega^2) \quad (14)$$

も考察に加える。

本稿の大きな目的は、正規モデル (7) あるいはポアソンモデル (9) において、確率的トレンドモデル (10)、確定的トレンドモデル (13)、定常モデル (14) の3つの将来シナリオのうちどれが最も実際のデータから支持されるかを検討することである。以下で見るように、どのモデルを採用するかによって将来の死亡率予測とそれに伴う長寿リスクの評価は大きく異なる。

4.2 ベイズモデルの構築プロセス

ベイズモデルでは、パラメータに事前分布を仮定し、観測データの尤度を通じて事後分布に変換して推測を行う。一般には、事後分布の解析的な導出は必ずしも容易ではない。しかし、マルコフ連鎖モンテカルロ法 (以下、MCMC 法) と呼ばれる高速サンプリングの手法を用いることによって、数値的に事後分布を評価する

ことが可能となった*4。本稿においても、MCMC 法によってサンプリングされたパラメータの乱数から、遷移方程式に従って、将来の κ_t を発生し、将来の死亡率のサンプリングを行う。

4.3 事前分布

観測方程式のパラメータ α と β の事前分布は、正規モデルにおいてもポアソンモデルにおいても共通に

$$\alpha \sim N_M(\mathbf{0}_M, \underline{\sigma_\alpha}^2 \mathbf{I}_M), \quad \beta \sim N_M((1/M)\mathbf{1}_M, \underline{\sigma_\beta}^2 \mathbf{I}_M),$$

と設定する。ここで、 $\mathbf{0}_M$ 、 $\mathbf{1}_M$ はそれぞれ 0 及び 1 のみからなる M 次元ベクトルである。また、正規モデルの σ_ε^2 は

$$\sigma_\varepsilon^2 \sim IG(\underline{a_\varepsilon}, \underline{b_\varepsilon})$$

と設定する。ここで、 $IG(a, b)$ は形状母数 a 、尺度母数 b を持つ逆ガンマ分布を表す。これらの事前分布の記述において、下線が付いた $\underline{\sigma_\alpha}^2$ 、 $\underline{\sigma_\beta}^2$ 、 $\underline{a_\varepsilon}$ 、 $\underline{b_\varepsilon}$ は、ハイパーパラメータである。

遷移方程式 (12) の誤差項のパラメータ σ_ω^2 は、各モデルに共通に

$$\sigma_\omega^2 \sim IG(\underline{a_\omega}, \underline{b_\omega})$$

とする。

確率的トレンドモデル (10) の定数項 λ は

$$\lambda \sim N(\underline{\lambda_0}, \underline{\sigma_\lambda}^2)$$

確定的トレンドモデル (13) のパラメータ $\gamma \equiv (\gamma_1, \gamma_2)$

$$\gamma \sim N(\underline{\gamma_0}, \underline{\Sigma_0})$$

と設定する。また、確定的トレンドモデル (13) 及び定常モデル (14) の係数パラメータ ρ は、 $(-1, 1)$ 上の切断正規分布に設定する。すなわち、 ρ の事前密度は

$$f(\rho) \propto \frac{1}{\underline{\sigma_\rho}} \exp\left(-\frac{\rho^2}{2\underline{\sigma_\rho}^2}\right), \quad -1 < \rho < 1$$

とする。以上の記述において、 $\underline{\lambda_0}$ 、 $\underline{a_\omega}$ 、 $\underline{b_\omega}$ 、 $\underline{\sigma_\lambda}^2$ 、 $\underline{\gamma_0}$ 、 $\underline{\Sigma_0}$ 、 $\underline{\sigma_\rho}^2$ はハイパーパラメータである。

4.4 事後分布からのサンプリング

観測データの全体を

$$\mathbf{Z} \equiv (\mathbf{z}_{t_{\min}}, \mathbf{z}_{t_{\min}+1}, \dots, \mathbf{z}_{t_{\max}})$$

と表す。正規モデルの場合は、 $\mathbf{z}_t = \mathbf{y}_t$ であり、ポアソンモデルの場合は、 $\mathbf{z}_t = \mathbf{D}_t \equiv (D_{x_{\min t}}, \dots, D_{x_{\max t}})$ とする。すべてのパラメータを θ で表すと、 θ の事後分布の密度関数は、一般に

$$f(\theta|\mathbf{Z}) \propto f(\mathbf{Z}|\theta)f(\theta) \quad (15)$$

で与えられる。ここで、 $f(\mathbf{Z}|\theta)$ は観測データの尤度であり、 $f(\theta)$ は θ の事前分布を表す。正規モデルとポアソンモデルの具体的な事後分布は付録を見られたい。さらに、MCMC 法によって、事後分布 (15) から乱数

$$\theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \dots, \theta^{(J)} \sim f(\theta|\mathbf{Z}) \quad (16)$$

を発生する。

*4 MCMC 法については、例えば、Scollnik (2001)、大森 (1995) を参照されたい

4.5 モデル選択

本稿では、正規観測方程式あるいはポアソン観測方程式の下で、 κ_t に関する3つのシナリオ(10), (13), (14)を比較する。各方程式における i ($i = 1, 2, 3$)番目のシナリオを S_i 、対応するパラメータを θ_i と記す。このとき、シナリオ S_i の事後確率は

$$f(S_i|\mathbf{Z}) = \frac{f(\mathbf{Z}|S_i)f(S_i)}{f(\mathbf{Z})}$$

と表わされる。ここで、 $f(\mathbf{Z}|S_i)$ はシナリオ S_i の下における周辺尤度

$$f(\mathbf{Z}|S_i) \equiv \int f(\mathbf{Z}|\theta_i, S_i)f(\theta_i|S_i)d\theta_i \quad (17)$$

あり、 $f(S_i)$ はシナリオ S_i の事前確率である。本稿では、各シナリオの事前確率が同一である

$$f(S_i) = 1/3$$

という仮定の下で、周辺尤度の大きさに基づいて、各シナリオの比較を行う。

周辺尤度の推定法には様々な手法が知られている*5が、ここでは恒等式

$$f(\mathbf{Z}|S_i) = \left[\int \frac{1}{f(\mathbf{Z}|\theta_i, M_i)} f(\theta_i|\mathbf{Z}, S_i) d\theta_i \right]^{-1}$$

に基づいて、事後分布からサンプリングした乱数を用いて

$$\hat{f}(\mathbf{Z}|S_i) \equiv \left[\frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \frac{1}{f(\mathbf{Z}|\theta_i^{(j)})} \right]^{-1}; \quad \theta_i^{(j)} \sim f(\theta_i|\mathbf{Z}, S_i) \quad (18)$$

により推定する。

4.6 将来死亡率の予測

いずれかのモデルが選択されたとし、 $\mathbf{Z}_+ = (z_{t_{\max}+1}, z_{t_{\max}+2}, \dots, z_{t_{\max}+K})$ を K 期先までの将来の \mathbf{Z} とするとき、その事後予測分布は

$$f(\mathbf{Z}_+|\mathbf{Z}) = \int f(\mathbf{Z}_+|\theta, \mathbf{Z})f(\theta|\mathbf{Z})d\theta = \int f(\mathbf{Z}_+|\theta)f(\theta|\mathbf{Z})d\theta$$

で与えられる。ここで最後の等号は、パラメータ θ が与えられたとき、 \mathbf{Z}_+ と \mathbf{Z} は独立に分布することによる。

5 わが国死亡率データへの応用

5.1 データセット

使用したデータは、国勢調査及び人口動態統計から採取したものであり、1970年から2003年までの65歳から98歳に関する我が国男性の人口及び死亡数データ(図2)を対象とした。

*5 例えば、Gelfand and Dey (1994)を参照されたい

5.2 ハイパーパラメータの設定

ハイパーパラメータとして $\underline{\sigma_\alpha^2}$, $\underline{\sigma_\beta^2}$, $\underline{a_\varepsilon}$, $\underline{b_\varepsilon}$, $\underline{a_\omega}$, $\underline{b_\omega}$, $\underline{\sigma_\rho^2}$, $\underline{\gamma_0}$, $\underline{\Sigma_0}$, $\underline{\lambda_0}$, $\underline{\sigma_\lambda^2}$ を設定しなければならない。以下の表 1 に、それぞれのパラメータに対する初期値の設定方法をまとめた。以下では、 $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\kappa}$ をポアソンモデルの（頻度論に基づく）最尤推定値とする。また、 $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ を $y_{xt} - (\hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \kappa_t)$ の標本分散とする。

モデル	ハイパーパラメータ	設定方法
共通要素		
	$\underline{a_\varepsilon}$	2.1
	$\underline{b_\varepsilon}$	$(a_\varepsilon - 1)\hat{\sigma}_\varepsilon^2$
	$\underline{\sigma_\alpha^2}$	$\hat{\alpha}_x$ の標本分散
	$\underline{\sigma_\beta^2}$	$\hat{\beta}_x$ の標本分散
確率トレンド : $\kappa_t - \kappa_{t-1} = \lambda + \omega_t$		
	$\underline{\lambda_0}$	$\hat{\kappa}_t - \hat{\kappa}_{t-1}$ の標本平均
	$\underline{\sigma_\lambda^2}$	$\hat{\kappa}_t - \hat{\kappa}_{t-1}$ の標本分散 / T
	$\underline{a_\omega}$	2.1
	$\underline{b_\omega}$	$(a_\omega - 1) \times \hat{\kappa}_t - \hat{\kappa}_{t-1}$ の標本分散
確定トレンド : $\kappa_t - (\gamma_1 + \gamma_2 t) = \rho(\kappa_{t-1} - (\gamma_1 + \gamma_2(t-1))) + \omega_t$		
	$\underline{\gamma_0}$	$\hat{\gamma} \equiv (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\kappa}$
	$\underline{\Sigma_0}$	$\hat{\kappa}_t - (\hat{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_2 t)$ の標本分散 $\times (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$
	$\underline{a_\omega}$	2.1
	$\underline{b_\omega}$	$(a_\omega - 1) \times$ 「 $\hat{\kappa}_t - (\hat{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_2 t)$ に対する AR(1) モデルの残差分散」
	$\underline{\sigma_\rho^2}$	1
定常 : $\kappa_t - \gamma_1 = \rho(\kappa_t - \gamma_1) + \omega_t$		
	$\underline{\gamma_{10}}$	$\hat{\kappa}_t$ の標本平均
	$\underline{\sigma_{\gamma_1}^2}$	$\hat{\kappa}_t$ の標本分散 / T
	$\underline{a_\omega}$	2.1
	$\underline{b_\omega}$	$(a_\omega - 1) \times$ 「 $\hat{\kappa}_t - \hat{\gamma}_1$ の AR(1) モデルの残差分散」
	$\underline{\sigma_\rho^2}$	1

表 1 ハイパーパラメータの設定方法

5.3 事後分布

以上により設定された 6 種類のベイズモデルによってそれぞれのパラメータに対するサンプリングを行った。図 3 には観測方程式として正規モデル、また遷移方程式として確率的トレンドモデルを採用した場合における、 α_{65} , β_{65} , κ_{1970} , κ_{2003} の MCMC ステップの軌跡を示している。いずれの場合も、最初の数十個を除いて、安定的な動きをしている。ここでは、最初の 5,000 個を捨て、それ以降の 15,000 個の標本を用いた。図 4 に示したのは、6 つのモデルから推定された $\boldsymbol{\kappa}$ の平均値推移および κ_{1970} の事後分布を示している。若干の誤差はあるものの、予測は初期値、すなわちポアソンモデルにおける推定値を中心にある程度の分散を持って

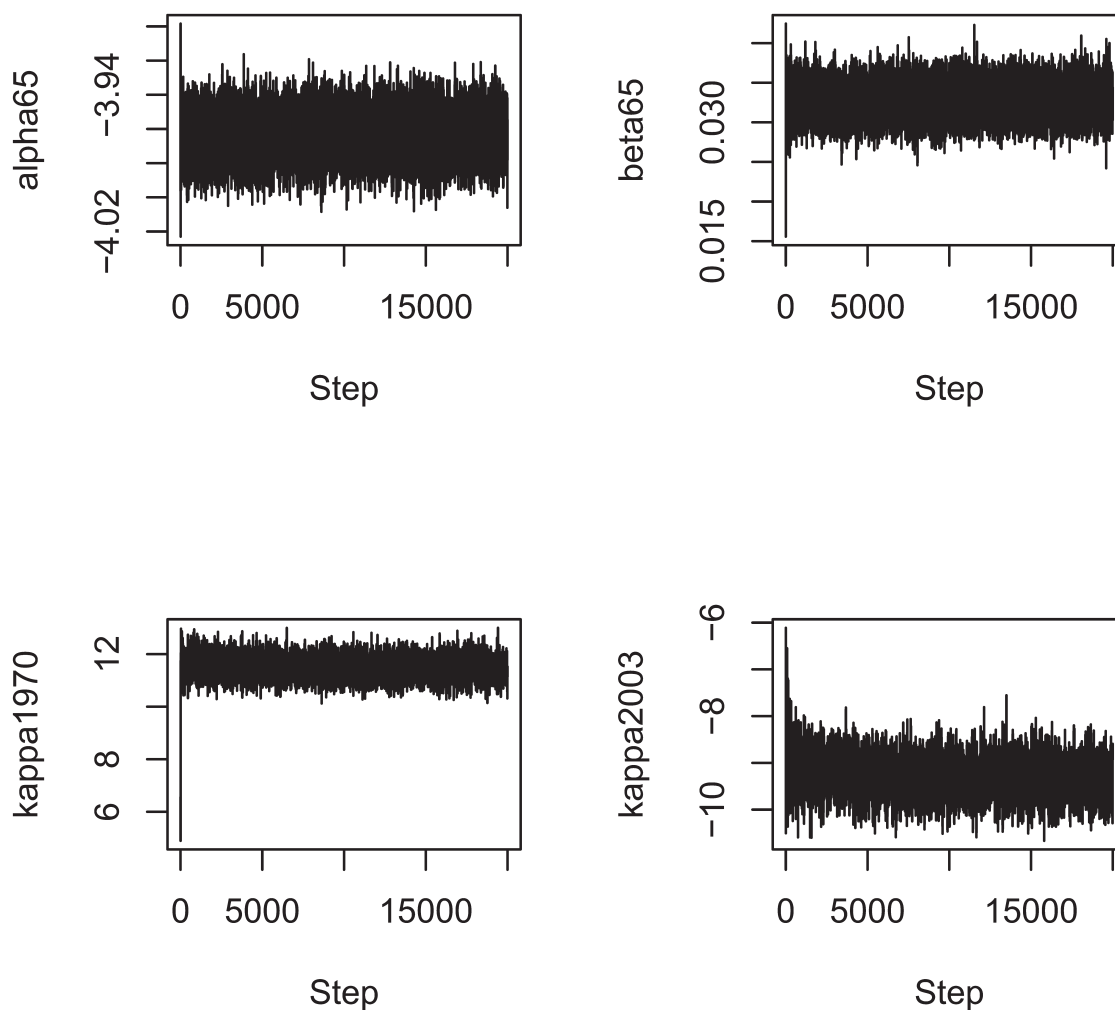


図3 確率的トレンドモデルにおける MCMC ステップの軌跡

推移することが理解される。正規モデル間、及びポアソンモデル間といった観測方程式内部においては平均値や分布形状に大きな差は生じていないが、観測方程式間ではその分布形状に大きな差が見られる。

5.4 周辺尤度

以下の表2には、(15)に基づいて、各モデルの MCMC プロセスから近似的に算出された周辺尤度の対数値を示した。周辺尤度は正規モデルとポアソンモデルの両者において確率的トレンドモデルが最も支持されるという結果を導いている。ここで0歳から98歳の全年齢に対しても同様に周辺尤度を計算したところ、全年齢のデータに対しては確定的トレンドモデルが支持される結果となった。両者の相違は、死亡率の改善が高年齢層で著しいという長寿リスクの背後にある事実を反映している。また、高年齢になるほど死亡率のばらつきが増加する点も関係しているかもしれない。

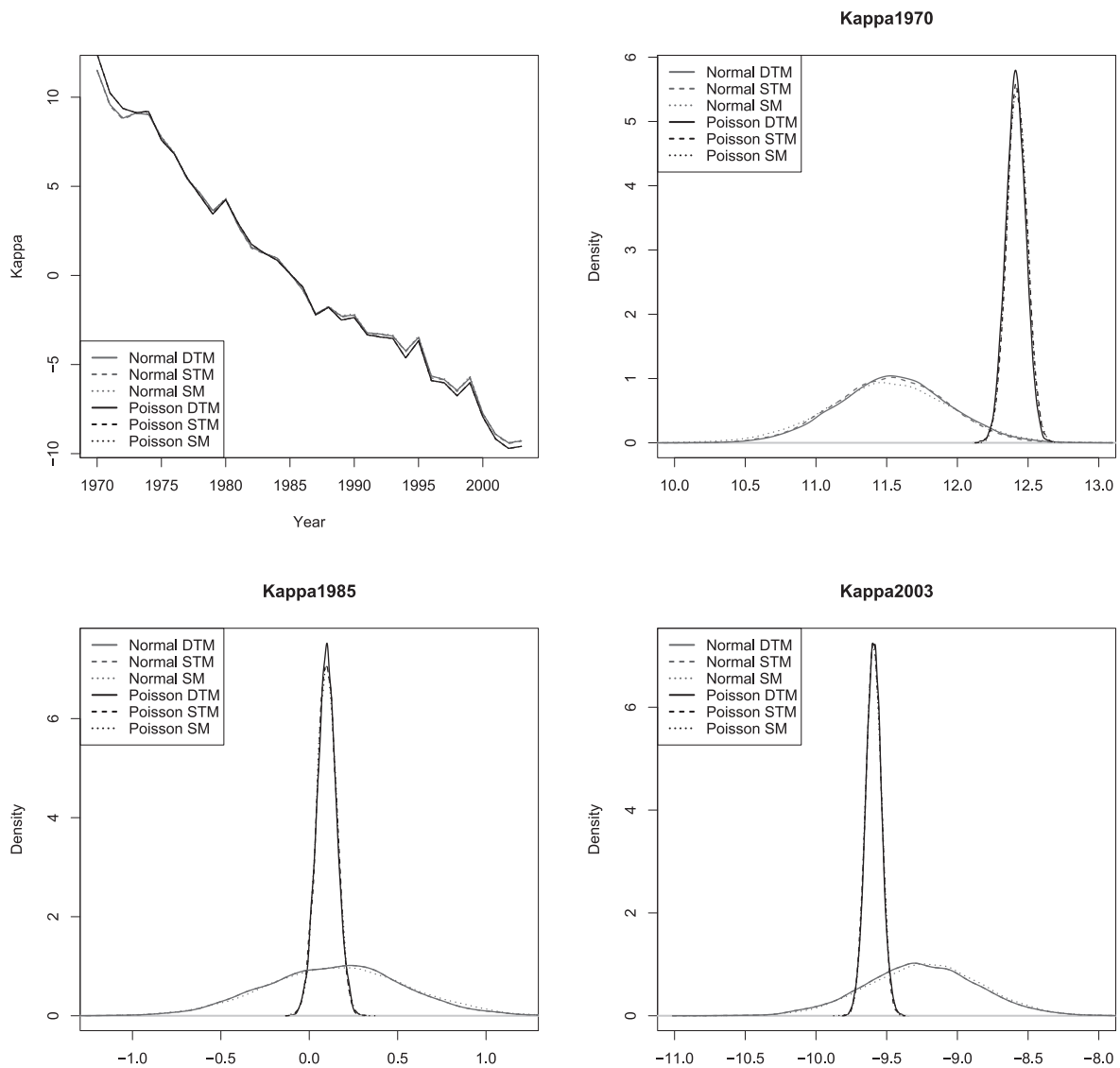


図4 各モデルにおける κ_t の平均値推移 (左上) および事後分布 (κ_{1970} (右上), κ_{1985} (左下), κ_{2003} (右下))

基礎データ：65歳-98歳			
観測方程式	確定トレンド	確率トレンド	定常
正規モデル	1407.368	<u>1408.4502</u>	1403.337
ポアソンモデル	-10018.997	<u>-10018.593</u>	-10018.987

基礎データ：0歳-98歳			
観測方程式	確定トレンド	確率トレンド	定常
正規モデル	<u>3225.808</u>	3216.518	3221.877
ポアソンモデル	<u>-49249.29</u>	-49257.02	-49254.33

表2 対数周辺尤度

6 年金リスクの評価

前節で議論した死亡率予測モデルの重要な応用として、将来死亡率の変動が支払うべき年金保険料に与える影響を評価する。

6.1 年金の現在価値

年金には様々なタイプがあるが、ここでは、 n 年後まで毎年一定の金額（簡単のために 1 円としよう）が支払われる単純な年金を考える。

Lee-Carter 法では、 t_0 年において x 歳の人、その後 t 年生存する確率は

$$\begin{aligned} {}_t p_x &= (1 - q_x(t_0)) \times (1 - q_{x+1}(t_0 + 1)) \times \cdots \times (1 - q_{x+t-1}(t_0 + t - 1)) \\ &= \exp \left[- \sum_{j=0}^{t-1} \exp[\alpha_{x+j} + \beta_{x+j} \kappa_{t_0+j}] \right] \end{aligned}$$

と与えられる。ここで、 κ_{t_0+j} ($j = 1, 2, \dots$) は将来の不確実なパラメータである。このとき、 t_0 年で x 歳の人、その後 n 年後まで毎年末に 1 円ずつ支払われる年金の現在価値は、

$$a_x = \sum_{t=1}^n \frac{{}_t p_x}{(1 + R)^t}$$

と計算される。

6.2 年金現在価値の分布

$x = 65$ 歳、 $n = 33$ 年、 $t = 2003$ 年の場合に、上記で定義された年金を考え、これまで述べてきたベイズモデルからサンプリングを行った結果を図 5 および図 6 に示した。ここで割引率 R としては近年の日本国債の近似的な水準として 1% を用いた。図 5 から見て取れるように、観測方程式を正規モデルあるいはポアソンモデルのいずれかで記述する場合でも、確定的トレンドモデルは鋭いピークを持つ。長寿リスクの観点においては、観測方程式よりも遷移方程式の方がより大きな影響を持つ。定常モデルは最も左側の領域に分布し、確定的トレンドモデルが最も右側の位置に分布している。図 6 からは、各シナリオにおいて、ポアソンモデルの方が正規モデルよりもリスクの小さな予測を行うことが伺える。確率的トレンドモデルと定常モデルでは、その差異はわずかであるが、確定的トレンドモデルにおいては、ポアソンモデルの集中度が極めて高い。また、平均のレベルも著しく異なっている。

年金現在価値の分布から得られるいくつかの基本的な統計量を表 3 にまとめた。上述のように平均的には定常モデル、確率的トレンドモデル、確定的トレンドモデルの順に支払額の期待現在価値は大きくなるが、確定的トレンドモデルの標準偏差は他の 2 つのモデルに比べて非常に小さい。表の最後の 2 列には添え字のパーセント点に対応するバリュアットリスクの値を掲げている。また、括弧内は平均値からの乖離を示す。平均値の付近とは異なり、裾の部分においては確率的トレンドモデルが最も高い現在価値を持つ。また、ポアソンモデルは正規モデルに比べて若干ではあるが裾が短い傾向も観測できる。

確率的トレンドモデルと確定的トレンドモデルの周辺尤度の大きさには明確な差はない。高齢者を対象とした周辺尤度は確率的トレンドモデルを支持するが、全年齢データの場合には、確定的トレンドが支持される。確定的なモデルは図 5 のように鋭いピークを持ち、上方への偏差を低く見積もる傾向を持つ。上方への偏差をより注意すべきリスクと捉えた場合、確率的トレンドモデルがより柔軟性を持った将来の長寿リスクを考慮し

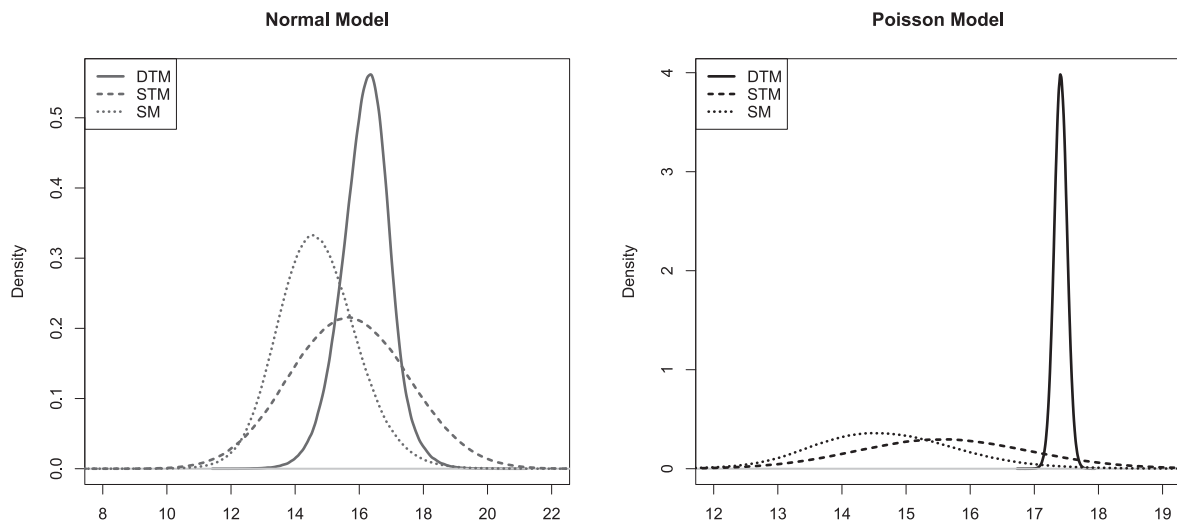


図5 年金現在価値の分布:観測方程式による比較 (左:正規モデル, 右:ポアソンモデル)

遷移方程式	観測方程式	平均	標準偏差	95%点 (-平均)	99%点 (-平均)
確定的トレンド	正規	16.204	0.776	17.417 (1.213)	18.081 (1.877)
	ポアソン	17.411	0.101	17.577 (0.166)	17.649 (0.238)
確率的トレンド	正規	15.690	1.822	18.717 (3.027)	19.935 (4.245)
	ポアソン	15.597	1.354	17.849 (2.252)	18.815 (3.218)
定常モデル	正規	14.712	1.241	16.816 (2.104)	17.883 (3.171)
	ポアソン	14.710	1.145	16.650 (1.940)	17.689 (2.979)

表3 年金現在価値分布の基本統計量

たモデルであると考えられる。従って、ベイズサンプリングを用いて将来のリスクを評価する場合には、確率的なトレンドを持った遷移方程式によって事後分布をサンプリングすることがより望ましいと考えられよう。

7 おわりに

本稿では、ベイズ法による Lee-Carter モデルの実装を行い、我が国死亡率データに適用した。特に、死亡率の時間的変化を記述する3種類のシナリオの中で、確率的トレンドモデルが最もデータと整合的であることを明らかとした。さらに、このモデルに基づいて、年金将来支払額の割引現在価値の事後分布からのサンプリングを行い、我が国の長寿リスクの影響を定量的に評価した。

本報告で定量化された長寿リスクは、リスク・プーリングでは消去できないシステムティック・リスクである。欧米では、このような長寿リスクのヘッジ手段として、生存リスクの証券化への動きが見られる*6。本稿が、そのような保険の新たなリスク管理への一助となれば幸いである。

*6 例えば、Cowley and Cummins (2005) を参照されたい。

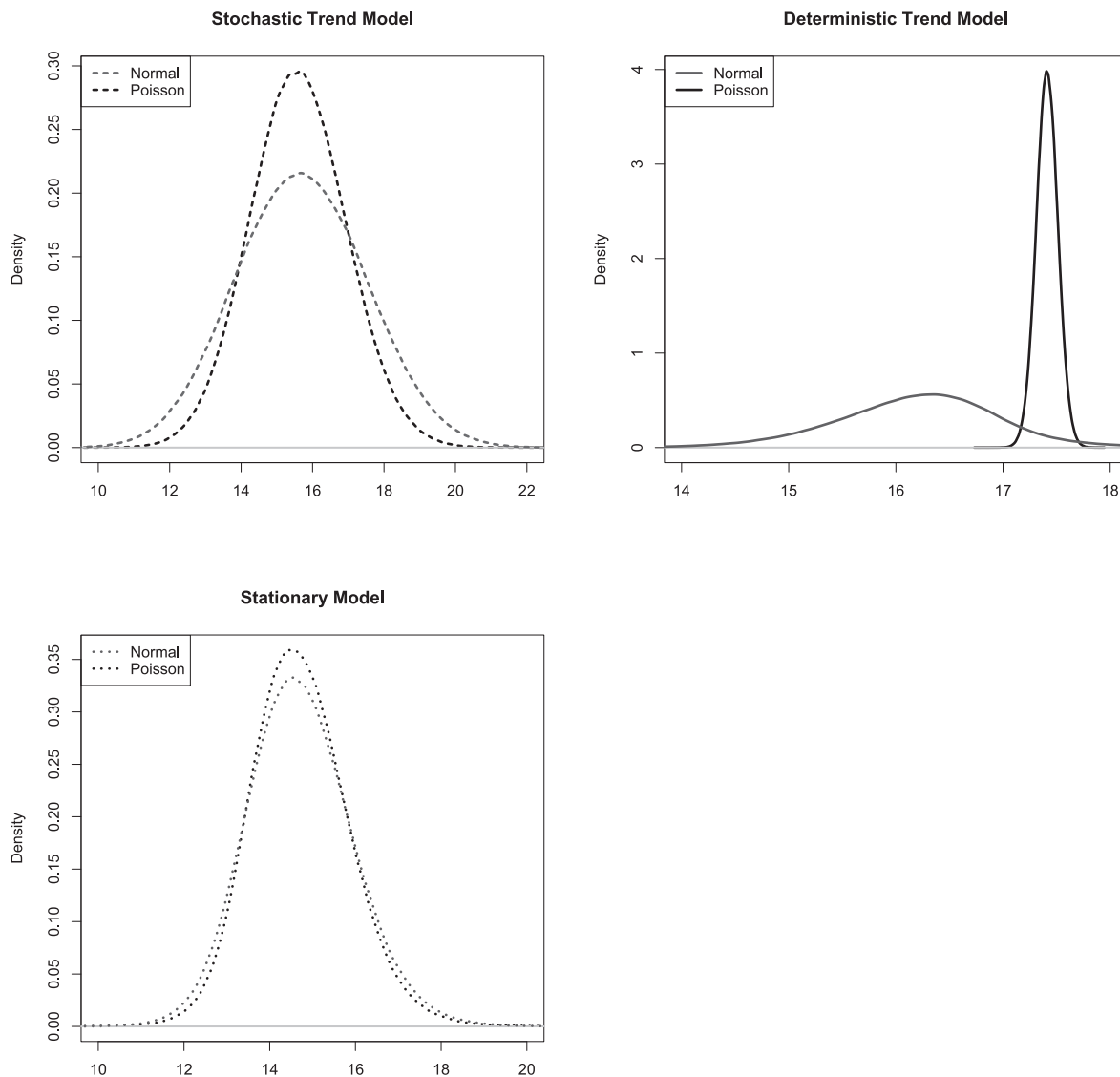


図6 年金現在価値の分布:遷移方程式による比較 (左上:確率的トレンドモデル, 右上:確定的トレンドモデル, 下:定常モデル)

付録 A 正規モデルのベイズ推測

A.1 事後分布からのサンプリング

死亡率データを

$$\mathbf{m} \equiv [m_{xt}] = (m_{t_{\min}} \dots m_{t_{\max}})$$

と記す。正規モデルの尤度関数は

$$L(\alpha, \beta, \kappa, \sigma_\varepsilon) = \prod_x \prod_t \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\varepsilon} \exp\left(-\frac{(y_{xt} - (\alpha_x + \beta_x \kappa_t))^2}{2\sigma_\varepsilon^2}\right) \quad (19)$$

として記述される。ここで遷移方程式に依存するパラメータは κ であり、 $\alpha, \beta, \sigma_\varepsilon$ の事後分布は遷移方程式に依らない。以下、各々のパラメータに対応する事後分布を与える。

A.2 正規モデルに共通するパラメータの事後分布

A.2.1 α_x の事後分布

各 $x(x = x_{\min}, \dots, x_{\max})$ に対して $\alpha_{-x} \equiv (\alpha_{x_{\min}}, \alpha_{x_{\min}+1}, \dots, \alpha_{x-1}, \alpha_{x+1}, \dots, \alpha_{x_{\max}})$ と定義する。 α_x の事後分布は以下の正規分布に従う：

$$\alpha_x \mid \mathbf{m}, \alpha_{-x}, \beta, \kappa, \sigma_\varepsilon^2, \sigma_\alpha^2, \sigma_\beta^2, \theta_\kappa \sim N(\mu_{\alpha_x}^*, \sigma_\alpha^{*2}) \quad (20)$$

ここで $\mu_{\alpha_x}^*$ および σ_α^* はそれぞれ

$$\mu_{\alpha_x}^* \equiv \frac{\sigma_\alpha^2}{\sigma_\alpha^2 T + \sigma_\varepsilon^2} \sum_t y_{xt} \quad \text{and} \quad \sigma_\alpha^* \equiv \sqrt{\frac{\sigma_\alpha^2 \sigma_\varepsilon^2}{\sigma_\alpha^2 T + \sigma_\varepsilon^2}}$$

であり、また θ_κ は遷移方程式に帰属するパラメータを意味している。本稿においては、上記の正規乱数を用いて MCMC 法のアルゴリズムであるギブス・サンプラーによって、 α_x の事後分布を評価する。

A.2.2 β_x の事後分布

各 $x(x = x_{\min}, \dots, x_{\max})$ に対して $\beta_{-x} \equiv (\beta_{x_{\min}}, \beta_{x_{\min}+1}, \dots, \beta_{x-1}, \beta_{x+1}, \dots, \beta_{x_{\max}})$ と定義する。 β_x の事後分布は以下の正規分布に従う。

$$\beta_x \mid \mathbf{m}, \alpha, \beta_{-x}, \kappa, \sigma_\varepsilon^2, \sigma_\alpha^2, \sigma_\beta^2, \theta_\kappa \sim N(\mu_{\beta_x}^*, \sigma_\beta^{*2}) \quad (21)$$

ここで $\mu_{\beta_x}^*$ および σ_β^* は

$$\mu_{\beta_x}^* = \frac{\sigma_\beta^2 \sum_t (y_{xt} - \alpha_x) \kappa_t + \sigma_\varepsilon^2 / M}{\sigma_\beta^2 \sum_t \kappa_t^2 + \sigma_\varepsilon^2} \quad \text{and} \quad \sigma_\beta^* = \sqrt{\frac{\sigma_\beta^2 \sigma_\varepsilon^2}{\sigma_\beta^2 \sum_t \kappa_t^2 + \sigma_\varepsilon^2}}$$

である。 α_x と同様に、上記の正規乱数を用いたギブス・サンプラーによって、 β_x の事後分布を評価する。

各々の MCMC ステップにおいて $\beta_{x_{\min}}$ から $\beta_{x_{\max}}$ へと順番に変化させる。 i 番目のサンプリング・ステップを上付きの添え字 (i) を用いて表現すれば、 $i+1$ 番目のプロセスにおいて β_x を変化させた際の β は $\beta^{(i+1)} = (\beta_{x_{\min}}^{(i+1)}, \dots, \beta_x^{(i+1)}, \beta_{x+1}^{(i)}, \dots, \beta_{x_{\max}}^{(i)})'$ と表現される。このとき制約条件 (8) を満たすため、以下の手順によって $\beta^{(i+1)}$ を評価する。

1. 上記の正規乱数を用いたギブス・サンプラーに従って、 $\beta_x^{(i)}$ の値を $\beta_{x*}^{(i+1)}$ へと更新する。
2. $\beta_*^{(i+1)} \equiv (\beta_{x_{\min}}^{(i+1)}, \dots, \beta_{x*}^{(i+1)}, \beta_{x+1}^{(i)}, \dots, \beta_{x_{\max}}^{(i)})'$ とする。このとき以下に従って $\beta_*^{(i+1)}$ 及び $\kappa^{(i+1)}$ を変更する。

$$\beta^{(i+1)} = \frac{\beta_*^{(i+1)}}{\beta}, \quad \kappa^{(i+1)} = \kappa^{(i+1)} \beta.$$

ただし

$$\beta \equiv \sum_{y < x} \beta_y^{(i+1)} + \beta_{x*}^{(i+1)} + \sum_{y > x} \beta_y^{(i)}.$$

A.2.3 σ_ε^2 の事後分布

σ_ε^2 の事後分布は以下の確率分布に従う。

$$\sigma_\varepsilon^2 \mid \mathbf{m}, \alpha, \beta, \kappa, \sigma_\alpha^2, \sigma_\beta^2, \theta_\kappa \sim IG\left(a_\varepsilon + \frac{TM}{2}, b_\varepsilon + \frac{1}{2} \sum_t \sum_x \{y_{xt} - (\alpha_x + \beta_x \kappa_t)\}^2\right) \quad (22)$$

本稿においては上記の逆ガンマ乱数を用いたギブス・サンプラーによって、 α_x の事後分布を評価する。

A.3 確定的トレンドモデル起因のパラメータに対する事後分布

確定的トレンドモデルでは、 $\theta_\kappa = (\rho, \gamma, \sigma_\omega^2)$ である。

A.3.1 κ_t の事後分布

確定的トレンドモデルにおいて、 κ_t の事後分布が従う密度関数は

$$f(\kappa_t | \mathbf{m}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\kappa}_{-t}, \sigma_\varepsilon^2, \rho, \gamma, \sigma_\omega^2) \propto \prod_{s=t_{\min}}^{t_{\max}} L(\mathbf{m}_s | \kappa_s, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \sigma_\varepsilon^2) f(\kappa_s | \kappa_{s-1}, \rho, \gamma, \sigma_\omega^2) \quad (23)$$

と記述できる。ここで $L(\mathbf{m}_s | \kappa_s, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \sigma_\varepsilon^2)$ は κ_t が与えられた際の尤度関数である。(23) は年 t に応じて次の3通りに分類される：

1. $t = t_{\min}$

$$\propto \prod_x \exp \left[-\frac{\{y_{xt} - (\alpha_x + \beta_x \kappa_t)\}^2}{2\sigma_\varepsilon^2} \right] \times \exp \left[-\frac{(\kappa_t - \eta_t)^2}{2\sigma_\omega^2} \right] \times \exp \left[-\frac{(\kappa_{t+1} - \eta_{t+1} - \rho(\kappa_t - \eta_t))^2}{2\sigma_\omega^2} \right]$$

2. $t = t_{\max}$

$$\propto \prod_x \exp \left[-\frac{\{y_{xt} - (\alpha_x + \beta_x \kappa_t)\}^2}{2\sigma_\varepsilon^2} \right] \times \exp \left[-\frac{(\kappa_t - \eta - \rho(\kappa_{t-1} - \eta_{t-1}))^2}{2\sigma_\omega^2} \right]$$

3. $t \neq t_{\min}, t_{\max}$

$$\propto \prod_x \exp \left[-\frac{\{y_{xt} - (\alpha_x + \beta_x \kappa_t)\}^2}{2\sigma_\varepsilon^2} \right] \times \exp \left[-\frac{(\kappa_t - \eta_t - \rho(\kappa_{t-1} - \eta_{t-1}))^2}{2\sigma_\omega^2} \right] \times \exp \left[-\frac{(\kappa_{t+1} - \eta_{t+1} - \rho(\kappa_t - \eta_t))^2}{2\sigma_\omega^2} \right]$$

上記の密度関数は標準的な確率分布によって記述することが可能ではない。従って本稿ではメトロポリス・ヘイスティングス (以下, MH) 法を用いて事後分布からのサンプリングを行う。以下に MH 法による κ_t サンプリングのアルゴリズムを示す。

1. 新たな κ_t の候補として $N(\kappa_t^{(i)}, \sigma_t^2)$ に従う正規乱数 $\kappa_{t*}^{(i+1)}$ を発生させる。
2. 遷移確率

$$\psi(\kappa_t^{(i)}, \kappa_{t*}^{(i+1)}) \equiv \min \left(1, \frac{f(\kappa_{t*}^{(i+1)} | \mathbf{m}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\kappa}_{-t}, \sigma_\varepsilon^2, \rho, \gamma, \sigma_\omega^2)}{f(\kappa_t^{(i)} | \mathbf{m}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\kappa}_{-t}, \sigma_\varepsilon^2, \rho, \gamma, \sigma_\omega^2)} \right) \quad (24)$$

を計算する。ここで

$$\boldsymbol{\kappa}_{-t}^{(i)} \equiv (\kappa_{t_{\min}}^{(i+1)}, \dots, \kappa_{t-1}^{(i+1)}, \kappa_{t+1}^{(i)}, \dots, \kappa_{t_{\max}}^{(i)})'$$

である。

3. $(0, 1)$ の一様乱数 u を発生し、 $u \leq \psi(\kappa_t^{(i)}, \kappa_{t*}^{(i+1)})$ ならば $\kappa_t^{(i+1)} = \kappa_{t*}^{(i+1)}$ 、それ以外ならば $\kappa_t^{(i+1)} = \kappa_t^{(i)}$ を採用する。
4. パラメータを

$$\boldsymbol{\kappa}^{(i)} = (\kappa_{t_{\min}}^{(i+1)}, \dots, \kappa_t^{(i+1)}, \kappa_{t+1}^{(i)}, \dots, \kappa_{t_{\max}}^{(i)})'$$

として更新し、制約条件 (8) を満たすように更に以下の公式に従って $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\kappa}$ を変更する。

$$\boldsymbol{\kappa}^{(i+1)} \leftarrow \boldsymbol{\kappa}^{(i+1)} - \bar{\boldsymbol{\kappa}}, \quad \boldsymbol{\alpha}^{(i)} \leftarrow \boldsymbol{\alpha}^{(i)} + \boldsymbol{\beta}^{(i)} \bar{\boldsymbol{\kappa}}$$

ここで

$$\bar{\kappa} \equiv \frac{1}{T} \left(\sum_{s \leq t} \kappa_s^{(i+1)} + \sum_{s > t} \kappa_s^{(i)} \right)$$

なお、 σ_t^2 は当初の 100 ステップにおける遷移確率が 20% から 50% の間になるよう試行錯誤的に選択する。

A.3.2 ρ の事後分布

ρ の事後分布は以下の正規分布に従う。

$$\rho \mid \mathbf{m}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\kappa}, \sigma_\varepsilon^2, \gamma, \sigma_\omega^2 \sim N(\mu_\rho^*, \sigma_\rho^{2*}) \quad (25)$$

と書き直すことができる。ここで

$$\mu_\rho^* = \frac{b_\rho}{a_\rho + \frac{\sigma_\omega^2}{\sigma_\rho^2}} \text{ and } \sigma_\rho^{2*} = \frac{\sigma_\omega^2}{a_\rho + \frac{\sigma_\omega^2}{\sigma_\rho^2}}.$$

ρ の事後分布は [-1,1] に切断された正規乱数を用い、ギブス・サンプラーによって評価できる。

A.3.3 γ の事後分布

γ の事後分布は 2 変量正規分布

$$\gamma \mid \mathbf{m}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\kappa}, \sigma_\varepsilon^2, \rho, \sigma_\omega^2 \sim N_2(\boldsymbol{\gamma}^*, \sigma_\omega^2 \boldsymbol{\Sigma}^*) \quad (26)$$

に従う。ここで

$$\boldsymbol{\Sigma}^* \equiv (\mathbf{X}'\mathbf{Q}\mathbf{X} + \sigma_\omega^2 \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1})^{-1} \text{ and } \boldsymbol{\gamma}^* \equiv \boldsymbol{\Sigma}^* (\mathbf{X}'\mathbf{Q}\boldsymbol{\kappa} + \sigma_\omega^2 \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} \boldsymbol{\gamma}_0)$$

および

$$\mathbf{X} \equiv \begin{pmatrix} 1 & t_{\min} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_{\max} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} \equiv \begin{pmatrix} 1 + \rho^2 & -\rho & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\rho & 1 + \rho^2 & -\rho & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\rho & 1 + \rho^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\rho & 1 + \rho^2 \end{pmatrix}$$

である。すなわち γ は上記の 2 変量正規乱数を用いたギブス・サンプラーによって評価する*7。

A.3.4 σ_ω^2 の事後分布

σ_ω^2 は逆ガンマ分布

$$\sigma_\omega^2 \mid \mathbf{m}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\kappa}, \sigma_\varepsilon^2, \rho, \gamma \sim IG \left(a_k + \frac{T}{2}, b_k + \frac{1}{2} \sum_t (\kappa_t - \eta_t - \rho(\kappa_{t-1} - \eta_{t-1}))^2 \right) \quad (27)$$

に従う。この結果、ギブス・サンプラーによって事後分布からサンプリングを行うことが可能である。

A.4 確率的トレンドモデル起因のパラメータに対する事後分布

確率的トレンドモデルでは、 $\boldsymbol{\theta}_\kappa = (\lambda, \sigma_\omega^2)$ である。

*7 遷移方程式に定常モデルを選択した場合には $\gamma_2 = 0$ にしてサンプリングを行えばよい。

A.4.1 κ_t の事後分布

確率的トレンドモデルにおいて κ_t が従う密度関数は

$$f(\kappa_t | \mathbf{m}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\kappa}_{-t}, \sigma_\varepsilon^2, \lambda, \sigma_\omega^2) \propto \prod_{s=t_{\min}}^{t_{\max}} L(\mathbf{m}_s | \kappa_s, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \sigma_\varepsilon^2) f(\kappa_s | \kappa_{s-1}, \lambda, \sigma_\omega^2) \quad (28)$$

と記述できる。さらに年 t に応じて (28) は以下の 3 通りに分類される。

1. $t = t_{\min}$

$$\propto \prod_x \exp \left[-\frac{\{y_{xt} - (\alpha_x + \beta_x \kappa_t)\}^2}{2\sigma_\varepsilon^2} \right] \times \exp \left[-\frac{(\kappa_t - \lambda)^2}{2\sigma_\omega^2} \right] \times \exp \left[-\frac{(\kappa_{t+1} - \lambda - \kappa_t)^2}{2\sigma_\omega^2} \right]$$

2. $t = t_{\max}$

$$\propto \prod_x \exp \left[-\frac{\{y_{xt} - (\alpha_x + \beta_x \kappa_t)\}^2}{2\sigma_\varepsilon^2} \right] \times \exp \left[-\frac{(\kappa_t - \lambda - \kappa_{t-1})^2}{2\sigma_\omega^2} \right]$$

3. $t \neq t_{\min}, t_{\max}$

$$\propto \prod_x \exp \left[-\frac{\{y_{xt} - (\alpha_x + \beta_x \kappa_t)\}^2}{2\sigma_\varepsilon^2} \right] \times \exp \left[-\frac{(\kappa_t - \lambda - \kappa_{t-1})^2}{2\sigma_\omega^2} \right] \times \exp \left[-\frac{(\kappa_{t+1} - \lambda - \kappa_t)^2}{2\sigma_\omega^2} \right]$$

以上の事後確率密度を用い、確定的トレンドモデルの場合と同様のアルゴリズムに従って MH サンプリングを行う。

A.4.2 λ の事後分布

λ の事後分布は以下の正規分布によって記述される。

$$f(\lambda | \mathbf{m}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\kappa}, \sigma_\varepsilon^2, \sigma_\omega^2) \sim N(\lambda^*, \sigma_\lambda^{*2}) \quad (29)$$

ここで

$$\lambda^* = \frac{\sigma_\lambda^2}{\sigma_\lambda^2 T + \sigma_\omega^2} \sum_t (\kappa_t - \kappa_{t-1}) \quad \text{and} \quad \sigma_\lambda^{*2} = \sqrt{\frac{\sigma_\lambda^2 \sigma_\omega^2}{\sigma_\lambda^2 T + \sigma_\omega^2}}$$

である。すなわち λ の事後分布は上記の正規乱数を用いたギブス・サンプラーによって評価する。

A.4.3 σ_ω^2 の事後分布

σ_ω^2 の事後分布は以下の逆ガンマ分布に従う。

$$f(\sigma_\omega^2 | \mathbf{m}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\kappa}, \sigma_\varepsilon^2, \lambda) \sim IG \left(a_\omega + \frac{T}{2}, b_\omega + \frac{1}{2} \sum_t (\kappa_t - \lambda - \kappa_{t-1})^2 \right) \quad (30)$$

従って σ_ω^2 の事後分布は逆ガンマ乱数を用いたギブス・サンプラーによって評価する。

付録 B ポアソンモデルのベイズ推測

B.1: 事後分布からのサンプリング

ポアソンモデルの尤度関数は

$$L(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\kappa}) = \frac{\exp\{E_{xt} \exp(\alpha_x + \beta_x \kappa_t)\} \{E_{xt} \exp(\alpha_x + \beta_x \kappa_t)\}^{D_{xt}}}{D_{xt}!} \quad (31)$$

$$\propto \prod_x \prod_t \exp(-E_{xt} \exp(\alpha_x + \beta_x \kappa_t) + D_{xt}(\alpha_x + \beta_x \kappa_t)) \quad (32)$$

と記述される。具体的な事後分布は前節の正規モデルの場合と同様に導出することができる。以下では各パラメータの従う事後分布を概説する。

B.1.1 α_x の事後分布

死亡数データを

$$\mathbf{D} = [D_{xt}] = (D_{t_{\min}} \quad \cdots \quad D_{t_{\max}})$$

と記す。 α_x の事後確率密度は

$$f(\alpha_x | \mathbf{D}, \boldsymbol{\alpha}_{-x}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\kappa}, \lambda, \sigma_\omega^2, \sigma_\alpha^2, \sigma_\beta^2) \propto \prod_t \exp\left(-E_{xt} \exp(\alpha_x + \beta_x \kappa_t) + D_{xt} \alpha_x - \frac{\alpha_x^2}{2\sigma_\alpha^2}\right) \quad (33)$$

として記述される。これを用い、MH法によって事後分布からのサンプリングを行う。

B.1.2 β_x の事後分布

β_x についても α_x と同様に事後分布

$$\begin{aligned} f(\beta_x | \mathbf{D}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}_{-x}, \boldsymbol{\kappa}, \lambda, \sigma_\omega^2) \\ \propto \prod_t \exp(-E_{xt} \exp(\alpha_x + \beta_x \kappa_t) + D_{xt}(\alpha_x + \beta_x \kappa_t)) \times \exp\left(-\frac{\beta_x^2}{2\sigma_\beta^2}\right) \\ \propto \prod_t \exp\left(-E_{xt} \exp(\alpha_x + \beta_x \kappa_t) + D_{xt} \beta_x \kappa_t - \frac{\beta_x^2}{2\sigma_\beta^2}\right) \end{aligned} \quad (34)$$

を用い、MHアルゴリズムに従ってサンプリングを行う。

B.2 確定的トレンドモデルに由来するパラメータに対する事後分布

$\rho, \gamma, \sigma_\omega^2$ の事後分布は正規モデルの場合と全く同一であるため、ここでは $\boldsymbol{\kappa}$ についてのみ言及する。事後分布の密度関数は

$$f(\boldsymbol{\kappa}_t | \mathbf{D}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\kappa}_{-t}, \sigma_\varepsilon^2, \rho, \gamma, \sigma_\omega^2) \propto \prod_{s=t_{\min}}^{t_{\max}} f(\mathbf{D}_s | \boldsymbol{\kappa}_s, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \sigma_\varepsilon^2) f(\boldsymbol{\kappa}_s | \boldsymbol{\kappa}_{s-1}, \rho, \gamma, \sigma_\omega^2) \quad (35)$$

と記述され、さらに年 t に応じて

1. $t = t_{\min}$

$$\propto \prod_x \prod_t \exp(-E_{xt} \exp(\alpha_x + \beta_x \kappa_t) + D_{xt}(\alpha_x + \beta_x \kappa_t)) \times \exp\left[-\frac{(\kappa_t - \eta_t)^2}{2\sigma_\omega^2}\right] \times \exp\left[-\frac{(\kappa_{t+1} - \eta_{t+1} - \rho(\kappa_t - \eta_t))^2}{2\sigma_\omega^2}\right]$$

2. $t = t_{\max}$

$$\propto \prod_x \prod_t \exp(-E_{xt} \exp(\alpha_x + \beta_x \kappa_t) + D_{xt}(\alpha_x + \beta_x \kappa_t)) \times \exp\left[-\frac{(\kappa_t - \eta - \rho(\kappa_{t-1} - \eta_{t-1}))^2}{2\sigma_\omega^2}\right]$$

3. $t \neq t_{\min}, t_{\max}$

$$\propto \prod_x \prod_t \exp(-E_{xt} \exp(\alpha_x + \beta_x \kappa_t) + D_{xt}(\alpha_x + \beta_x \kappa_t)) \\ \times \exp\left[-\frac{(\kappa_t - \eta_t - \rho(\kappa_{t-1} - \eta_{t-1}))^2}{2\sigma_\omega^2}\right] \exp\left[-\frac{(\kappa_{t+1} - \eta_{t+1} - \rho(\kappa_t - \eta_t))^2}{2\sigma_\omega^2}\right]$$

に分類される。以上を用い、MH アルゴリズムに基づいてサンプリングを行う。

B.3 確率的トレンドモデル起因のパラメータに対する事後分布

λ, σ_ω^2 の事後分布は正規モデルの場合と全く等しいため、ここでは κ についてのみ言及する。 κ_t の事後分布の密度関数は

$$f(\kappa_t | \mathbf{D}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\kappa}_{-t}, \lambda, \sigma_\omega^2) \propto \prod_{s=t_{\min}}^{t_{\max}} f(\mathbf{D}_s | \kappa_s, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) f(\kappa_s | \kappa_{s-1}, \lambda, \sigma_\omega^2) \quad (36)$$

であり、歴年 t に応じて

1. $t = t_{\min}$

$$\propto \prod_x \exp(-E_{xt} \exp(\alpha_x + \beta_x \kappa_t) + D_{xt}(\beta_x \kappa_t)) \times \exp\left[-\frac{(\kappa_t - \mu)^2}{2\sigma_\omega^2}\right] \times \exp\left[-\frac{(\kappa_{t+1} - \mu - \kappa_t)^2}{2\sigma_\omega^2}\right]$$

2. $t = t_{\max}$

$$\propto \prod_x \exp(-E_{xt} \exp(\alpha_x + \beta_x \kappa_t) + D_{xt}(\beta_x \kappa_t)) \times \exp\left[-\frac{(\kappa_t - \mu - \kappa_{t-1})^2}{2\sigma_\omega^2}\right]$$

3. $t \neq t_{\min}, t_{\max}$

$$\propto \prod_x \exp(-E_{xt} \exp(\alpha_x + \beta_x \kappa_t) + D_{xt}(\beta_x \kappa_t)) \times \exp\left[-\frac{(\kappa_t - \mu - \kappa_{t-1})^2}{2\sigma_\omega^2}\right] \exp\left[-\frac{(\kappa_{t+1} - \mu - \kappa_t)^2}{2\sigma_\omega^2}\right]$$

に分類される。以上に基づき、MH サンプリングを行う。

参考文献

- [1] 大森裕浩 (2005), 「マルコフ連鎖モンテカルロ法の基礎と統計科学への応用」 甘利・竹内・竹村・伊庭編 『計算統計 II』: マルコフ連鎖モンテカルロ法とその周辺 (岩波書店) 所収
- [2] 小暮厚之・長谷川知弘 (2007), 「将来生命表の構築」 小暮編 『リスクの科学』: 金融・保険リスクのモデル分析の (朝倉書店) 所収.
- [3] 小暮厚之・長谷川知弘 (2008), 「生命表の統計学」 国友・山本編 『21 世紀の統計科学』 Vol-I: 社会・経済と統計科学 (東京大学出版会) 所収.
- [4] Brouhns, N., Denuit, M. and Vermunt, J.K. (2002a), "A Poisson log-bilinear regression approach to the construction of projected lifetables," *Insurance: Mathematics and Economics*, **31**, 373–393.

- [5] Brouhns, N., Denuit, M., Vermunt, J.K. (2002b), "Measuring the longevity risk in mortality projections," *Bulletin of the Swiss Association of Actuaries*, 105–130.
- [6] Cowley, A. and Cummins, D.J. (2006) "Securitization of Life Insurance Assets and Liabilities," *Journal of Risk and Insurance* **72**, 193–226.
- [7] Czado, C., Delwarde, A. and Denuit, M. (2005), "Bayesian Poisson log-bilinear mortality projections," *Insurance: Mathematics and Economics*, **36**, 260–284.
- [8] Gelfand, D. and Dey, K. (1994), "Bayesian Model Choice: Asymptotics and Exact Calculations," *Journal of the Royal Statistical Society. Series B*, **56**, 501–514.
- [9] Lee, R.D. and Carter, L.R. (1992), "Modeling and forecasting U.S. mortality," *Journal of the American Statistical Association*, **87**, 659–675.
- [10] Olivieri, A. (2001), "Uncertainty in mortality projections: an actuarial perspective," *Insurance: Mathematics and Economics*, **29**, 231–245.
- [11] Pedroza, C. (2006), "A Bayesian forecasting model: predicting U.S. male mortality," *Biostatistics*, **7**, 530–550.
- [12] Pitacco, E. (2004), "Survival models in a dynamic context: a survey," *Insurance: Mathematics and Economics*, **35**, 279–298.
- [13] Renshaw, A.E., and Haberman, S. (2003), "Lee-Carter mortality forecasting with age specific enhancement," *Insurance: Mathematics and Economics*, **33**, 255–272.
- [14] Scollnik, D. P. M. (2001), "Actuarial modeling with MCMC and BUGS," *North American Actuarial Journal*, **5**, 96–125.