研究論文

解約率・払済率が確率的に変動する場合における生命保険会社の株主資本評価

小倉　宏之[1]

2007 年 10 月 18 日投稿
2008 年 03 月 17 日受理

概要

本研究は，死亡率と運用実績がともに確率過程に従う状況下で，解約や払済転換を許す変額保険契約を保有する生命保険株式会社において，その株主資本を評価するための基礎モデルの構築を行い，その上で解析的計算を行ったものである．

株主資本価値を算定するモデルが与えられれば，生命保険会社が株主資本を最大化するためにどのような財務戦略を立案すべきか，比較静学分析を通じて道筋をつけることが可能となる．

この論文における新たな貢献は，従来型の固定ペイオフタイプ保険商品でなく，最低保障のついた変額保険という条件のもとで，３つ以上の不確定要素を含む場合における株式価値のペイオフを明らかにし，その解析的計算の近似的方法を明らかにしたことにある．

キーワード：保険会社，自己資本，解約率，比較静学分析

1　はじめに

生命保険会社のリスクを支配する不確実要素には様々なものがある．最も代表的なものが金利と死亡率であり，これに加えて契約者の判断に依存する解約失効，払済・延長契約への転換，さらには別商品への転換といったイベントの発生が存在する．それらの影響を測るにあたっては確率論的手法を取り入れるべきであると，実務の分野からも強く主張されている．例えば「生命保険会社の保険計理人の実務基準」(平成 19 年 1 月 17 日改定)第 11 条には，保険計理人は責任準備金の積み立てが健全であることを確認するための手法として少なくとも 10 年間の将来予測を，原則として確率論的手法により行うこととしている．こうした確率論的評価にあたり理論の見地から考えなければならない課題は，次の３点である．

「それぞれの不確実要素がどのような確率過程に従っているか．」

「その不確実要素にかかるリスク調整済確率測度はどう考えるべきか．」

「各々の不確実性間の相関関係はどのようなものであるか．」

1 番目について，多くの研究では時間的に離散なモデルであれば互いに同一かつ独立な正規分布の累積，時間的に連続なモデルであればブラウン運動ないしその関数を用いている．これは 2 番目とも関係のあることなのは明らかであろう．実際，この代表的な確率過程を用いるならばリスク調整済確率測度への変換にあたってエッシャー変

[1]早稲田大学大学院ファイナンス研究科専門職学位課程，〒103-0027　中央区日本橋 1-4-1,
ogu-hiro@moegi.waseda.jp

換，ないしワン変換といった数学的に扱いやすく，金融工学と整合性のある技法が存在し，研究が進んでいる．例えば門田[2006]による「転換権のオプション価値評価」に関する研究ではワン変換が，小島[2007]による「死亡リスクスワップ取引の価格付け」に関する研究ではエッシャー変換が，それぞれ用いられている[2]．

一方３番目については，考慮しようとする不確定要素の組み合わせで様々なケースが存在し，様々な課題が提示され得る．

例えば谷口[2003]は，保障性保険商品における金利と解約率の相関関係がどのようなものであるかについて分析して，保険負債の時価評価において確率モデルに相関関係を設定することの意義について考察している．その結果，特に金利差は経過年数と金利差（その保険商品の実質利回りと国際指標銘柄利回りの差）の関数として解約率が表されるという仮説を典型的な養老保険においてモンテカルロシミュレーションにより検証し，「解約失効率と金利の間に明確な正の相関はない」というおおむね否定的な結論を報告している．

しかし，今日貯蓄性商品の主流となりつつある最低死亡保障付き変額保険において，この状況はどうなるであろうかという点は検討課題として残されている．また，通常はほとんど自明なこととされているが，例えば「解約率」と「死亡率」については負の相関が存在しているであろうことは想像に難くない．また「死亡率」と「金利」に相関があるとは考えにくく，独立と考えるのが自然である．このことは先の論文で主張しているところの「解約率と金利の間に明確な正の相関がない」ことと必ずしも整合しない．これら３つ以上の要素の相関，そしてそれが保険会社の収益に与える影響は，直感的認識に比べかなり複雑である．一部分の特徴のみ取り出して詳細分析することばかりでなく，これらが並立するような状況を考えることも必要であると考える．

以上を踏まえた本稿の貢献は，次の３つである．１つ目は，これら不確実要素をばらばらに考慮するのでなく，煩雑になることは承知の上で「多期間にわたる契約者の選択と，保険事故による分岐」を意識した複合的な多期間モデルを作ったことである．２つ目は，「ある年度での決算」に着目して精密な解析的計算を試みたことである．具体的にはその株主資本に関する確率過程とその平均値がどう計算されるかを分析し，このようなモデルであっても，株主資本が「死亡率」「解約率・払済転換率」「ファンド収益率」なる３つ以上の不確定要素を原資産とするデリバティブととらえられることを確認したことである．３つ目は，このモデルにおける比較静学分析の一例として，ファンドのボラティリティに対する株主資本の感応度を分析したことである．

本論文の構成は以下の通りである．第２章では生命保険会社のモデルを定義し，株主資本に関する確率過程を記述する．第３章では，不確実要素の相関が単純である場合について２章における株主資本の平均値を計算した上で，その比較静学分析を行う．併せて，相関について条件を緩和した場合にどのような計算が可能であるかについて概説する．そして第４章で結論と今後の課題を述べる．加えて補遺においては，３章で概説した計算に関する詳細をまとめている．

[2] これらの確率測度の変換は，実は代表的投資家の効用関数を特定のタイプに制限し，不完備市場における同値マルティンゲール測度を特定している．よって代表的投資家の効用関数の特定化が現実と整合的であるか，十分検証せねばならないという問題もある．

2 モデル

2.1 設定

最初に，モデルとなる生命保険会社を定義する．

（1）この生命保険会社は，唯一の保険商品「x 歳加入変額養老保険」を初年度始に販売した会社である．契約は被保険者が満 x 歳の誕生日時に成立し，満期は被保険者が $x+n$ 歳到達の日であり，このとき全契約は消滅する．額面保険金額は，契約者一人あたり K 円とする．

（2）保険料は，毎年度初日に契約者が会社に支払い， $x+n-1$ 歳到達の日まで支払うとする（年払）．この保険料 π 円は，保険商品設計時点で定めた契約年齢に応じた一定額であり，次のように計算される．

$$\pi = K \cdot \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \qquad (2-1)$$

ただし，

$$A_{x:\overline{n}|} = \sum_{u=0}^{n} {}_u p_x q_{x+u} \left(1+i\right)^{-u} + {}_{n-s} p_{x+s} \left(1+i\right)^{-n} \qquad (2-1a)$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{u=1}^{n} {}_u p_x \left(1+i\right)^{-u+1} \qquad (2-1b)$$

$${}_t p_x \equiv \begin{cases} 1 & (t=0) \\ \prod_{s=0}^{t-1} \left(1-q_{x+s}\right) & (t>0) \end{cases} \qquad (2-1.c)$$

q_{x+u}, i は保険会社が本保険商品設計にあたり定めた計算基礎率であり，それぞれ予定死亡率，予定利率と呼ばれる．特に q_{x+u} は $x+u$ 歳における予定死亡率を意味し，日本アクチュアリー会が定めた標準予定死亡率を用いる．なお，付加保険料部分は考慮外とした．

（3）t 年度中に被保険者が死亡したら，t 年度末に契約者は死亡保険金 $\tilde{S}_t$ 円[3]を受け取って契約は消滅する．これは，会社によって合同運用されるリスク資産ファンド（実際の生命保険会社における変額保険特別勘定合同運用口を模したもので，ここでは単に変額保険ファンドと呼ぶ）の基準価額 $\tilde{R}_t$ を用いて， K 円を最低保証金額とする確率変数である．具体的には， μ, σ は定数（特に $\sigma > 0$ ）として，以下により定義される．

$$R_0 = 1 \qquad (2-2a)$$

$$\tilde{R}_{t+1} = R_t \exp\left(\mu + \sigma \tilde{X}_t\right) \qquad (2-2b)$$

$$\tilde{X}_t \sim N\left(0,1\right), \quad \text{i.i.d.} \qquad (2-2c)$$

$$\tilde{S}_t = K \cdot \max\left(1, \tilde{R}_t\right) \qquad (2-2d)$$

注） $\max\left(x,y\right) \equiv \begin{cases} x & (x \geq y) \\ y & (x < y) \end{cases}$

また(2.2c)は $\tilde{X}_t$ が平均０分散１の標準正規分布に従うことを意味する．

（4） t 年度末に生存していた契約者は次の選択肢を持つ．

---

[3] 確率変数であることを示す際，変数の上に～(tilde)を付す．以下同じ．

(A)　契約を継続する.

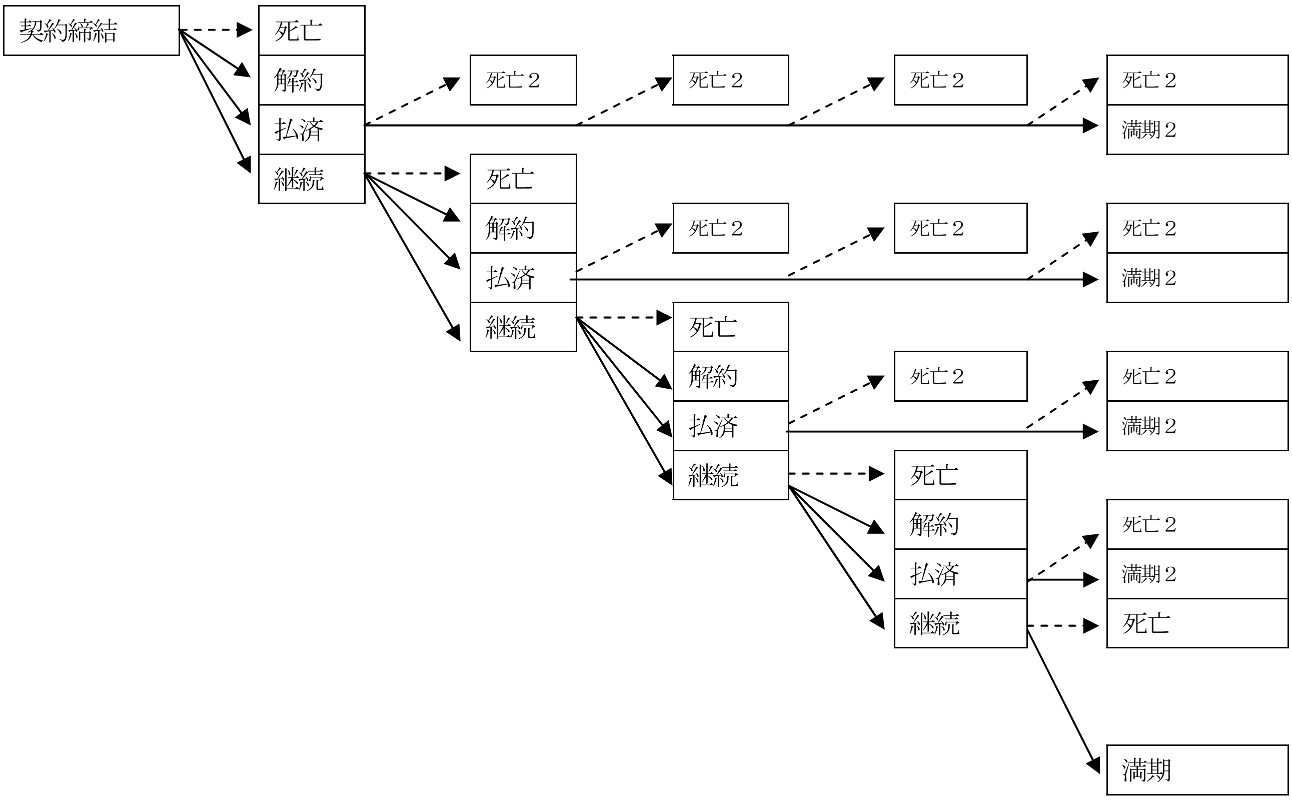
(B)　契約を解約し，解約返戻金ならびにそれまでの積立配当金を受け取って契約は消滅する（解約）.

(C)　契約への保険料払い込みを中止し，保険金固定，追加保険料不要であるほか，満期は同じである定額保険金の養老保険契約に転換する．このときの保険金額は，期末時点の責任準備金ならびに当該契約へ前年度末までに割り当てられた契約者配当によって会社が決定する．これを払済，または払済への転換と呼び，払済へ転換された契約を払済契約と呼ぶ.

s 年度末（$s<t$）に(C)を選択した払済契約について，t 年度中に被保険者が死亡したなら，契約者は払済時に定められた保険金を t 年度末に受け取って契約は消滅する．契約者が常時(A)を選択し続け，満 $x+n$ 歳に満期を迎えたとき，契約者は満期保険金を受け取って契約は消滅する．s 年度末に(C)を選択した後，満 $x+n$ 歳に満期を迎えたとき，契約者は払済満期保険金を受け取って契約は消滅する.

以上の選択を Decision Tree によって表すと以下のとおりである．（ここでは，$n=5$ の場合を例示した.）

図 1:保険契約の状態遷移ツリー[4]



（5）契約者の各期における意思決定に用いられる情報は，以下の項目である.

(A)　保険料累計額

(B)　期末の約定解約返戻金

(C)　期末の積立配当金，並びにその積立利率

[4] 「死亡２」「満期２」とあるのは，払済転換後のイベントであり，死亡保険金が継続中の契約である場合と計算方法が異なることを意味する.また，点線の矢印は偶然性に左右される異動である一方，実線の矢印は契約者側の選択肢である.

(D) 直前年度までの変額保険基準価格（運用利回り）

(E) 直近年度までの利子率

(F) 契約者の主観による，被保険者の将来の死亡率

（6）以下の情報は会社のみが持ち，契約者には開示されない．もしくは，開示されていてもほとんど契約者には利用不可能である．

(A) 保険料算出基準となる基礎率（予定利率，予定死亡率，予定事業費率）

(B) 払済への転換にあたり保険金算出基準となる基礎率

(C) 保険契約群団の実績死亡率[5]

2.2 第*t+1*決算[6]（$t=0,1,\cdots,n-1$）

続いて上記生命保険会社の決算をモデル化するにあたって，次の仮定をおく．

（1）確率的要素は死亡率，解約率，払済選択率，および変額保険資産の運用利回りのみとする．これらの変数は全て各決算年度の開始時点では確定しておらず，年度末において初めて確定する．払済転換後の契約にかかる資産の運用利回り（生保一般勘定利回り），配当の積立利回りは確率要素のない前提数値（無リスク金利）とする．

（2）1年度初，即ち時点$t=0$にx歳の契約者がl_x^a人加入し，時点tでの「契約者」「払済契約者」をそれぞれl_{x+t}^a人，l_{x+t}^H人と表すこととする．払済契約者は転換によって生じるので，もちろん$l_x^H=0$である．

（3）*t+1*年度末に，*t+1*年度初の契約者ならびに払済契約者の数に$\tilde{q}_{x+t}$を乗じた件数が死亡し，契約が消滅する．また，$\tilde{w}_{x+t}^K$を乗じた件数が解約により消滅し，$\tilde{w}_{x+t}^H$を乗じた件数が払済へ転換をする．よって件数に関して次の関係が成り立つ．

$$\tilde{l}_{x+t+1}^a = l_{x+t}^a\left(1-\tilde{q}_{x+t}-\tilde{w}_{x+t}^K-\tilde{w}_{x+t}^H\right) \qquad (2-3a)$$

$$\tilde{l}_{x+t+1}^H = l_{x+t}^H\left(1-\tilde{q}_{x+t}\right)+l_{x+t}^a\tilde{w}_{x+t}^H \qquad (2-3b)$$

以上の前提の下，第*t+1*決算を考える．なお，付加保険料収入と事業費支出については無視している．

---

[5]実務的にはこの数値は明示的に出ることはなく，同じ条件の契約全体について持分を群団で計算して残存する一口ごとに割り振る（アセットシェアの算出）ことで配当率を算出するという方法で，結果的に実績の死亡率が反映される．

[6] 時点*t*から*t+1*にかけての決算をこのように称する．よって「時点*t*」とは*t+1*年度初めのことであり，*t*年度末でもある．実務的には年度の境界で会計上の処理（決算処理）があるが，それらは考慮外とする．

2.2.1　期初における貸借対照表

t+1 年度期初（時点 *t*）の貸借対照表は以下の通りである．

表 1: 第 *t+1* 決算年度期初の貸借対照表

$\underline{\underline{A}}_t^H$ ：資産（一般勘定）	$\underline{\underline{V}}_t^H$ ：責任準備金（一般勘定）
$\underline{\underline{A}}_t^a = l_{x+t}^a A_t^a$ ：資産（特別勘定）	$\underline{\underline{V}}_t^a = l_{x+t}^a V_t^a$ ：責任準備金（特別勘定）
	$\underline{\underline{D}}_t = l_{x+t}^a D_t$ ：配当準備金
	$\underline{\underline{C}}_t$ ：株主資本

二重下線で示した記号は，保険契約群団全体で評価される数値である．また，最上段の資産・負債両建項目は「払済契約」にかかる生命保険一般勘定科目で，表のデザイン上両建てであるかのように記載しているがイコールとは限らない[7]．払済契約にかかる「保険契約高（額面死亡保険金額の累計）」は，$\underline{\underline{H}}_t$ であるとする．この金額は払済を選択した年度に応じて異なるため，その人数で割った数字は取り上げていない．資本の部は，

$$\underline{\underline{C}}_t = \underline{\underline{A}}_t^H + \underline{\underline{A}}_t^a - \underline{\underline{V}}_t^H - \underline{\underline{V}}_t^a - \underline{\underline{D}}_t \tag{2−4}$$

とする．

2.2.2　期中における費用・収益

本モデルにおける年間の費用・収益は以下の通りである．

（1）死亡保険金（*t+1* 年度末に支払う）

これは継続契約者の分である

$$\underline{\underline{\widetilde{S}}}_{t+1}^a = l_{x+t}^a \widetilde{q}_{x+t} \cdot K \cdot \max\left(1, \widetilde{R}_{t+1}\right) \tag{2−5}$$

および払済契約者の分である

$$\underline{\underline{\widetilde{S}}}_{t+1}^H = \widetilde{q}_{x+t} \cdot \underline{\underline{H}}_t \tag{2−6}$$

からなる．

（2）解約返戻金（*t+1* 年度末に支払う）

実際商品においてよく用いられる手法にならい，k を *n* 未満の整定数，α を正の定数として

[7] そもそもここで言う特別勘定資産は，払済契約にかかる部分以外全て（例えば配当準備金に係る部分）を含んでおり，実務での取り扱いとは全く異なる．あくまで最終目標である株主資本計算のために簡約化している点に留意願いたい．

$$\underline{\underline{\widetilde{W}}}^{a}_{t+1} = l^{a}_{x+t} w^{K}_{x+t} \cdot \frac{\widetilde{R}_{t+1}}{R_t}\left(V^{a}_{t} + \pi\right)\left(1 - \frac{\alpha \max(k-t,0)}{k}\right) \quad (2-7)$$

とする.（αは解約控除を意味する.）この支払と同時に負債側から取り崩される責任準備金（解約消滅V）は

$$\underline{\underline{\widetilde{V}}}^{aK}_{t+1} = l^{a}_{x+t} w^{K}_{x+t} \cdot \frac{\widetilde{R}_{t+1}}{R_t}\left(V^{a}_{t} + \pi\right) \quad (2-8)$$

と表される.

（3）消滅時配当金（*t+1* 年度末に支払う）

契約の消滅にあたり支払われる配当金には，被保険者の死亡時に支払われる

$$\underline{\underline{\widetilde{D}}}^{ad}_{t+1} = l^{a}_{x+t} \widetilde{q}_{x+t} D_t \quad (2-9)$$

および，解約に対して支払われる

$$\underline{\underline{\widetilde{D}}}^{aK}_{t+1} = l^{a}_{x+t} \widetilde{w}^{K}_{x+t} D_t \left(1 - \frac{\alpha \max(k-t,0)}{k}\right) \quad (2-10)$$

の２つがある.

（4）払済への転換（*t+1* 年度末に責任準備金（特別勘定）から同（一般勘定）へ振替）

これは正しくはペイオフではなく，契約が払済へ転換されるにあたって他の負債項目から払済契約の責任準備金へ振り返られる調整勘定科目である．このうち責任準備金から充当される分は

$$\underline{\underline{\widetilde{W}}}^{H}_{t+1} = l^{a}_{x+t} \widetilde{w}^{H}_{x+t} \cdot \left(\frac{\widetilde{R}_{t+1}}{R_t}\left(V^{a}_{t} + \pi\right)\right) \quad (2-11)$$

であり，配当準備金から充当される分が

$$\underline{\underline{\widetilde{D}}}^{aH}_{t+1} = l^{a}_{x+t} \widetilde{w}^{H}_{x+t} \cdot D_t \quad (2-12)$$

である.

（5）責任準備金への繰入

t+1 年度末と *t+1* 年度初＝*t* 年度末の責任準備金の差額が「繰入」である．そのうち継続契約に対する分が

$$\widetilde{l}^{a}_{x+t+1}\widetilde{V}^{a}_{x+t+1} - l^{a}_{x+t}V^{a}_{x+t} = \frac{\widetilde{R}_{t+1}}{R_t}\left(V^{a}_{t} + \pi\right)\cdot l^{a}_{x+t} - \underline{\underline{\widetilde{\hat{S}}}}^{a}_{t+1} - \underline{\underline{\widetilde{W}}}^{K}_{t+1} - \underline{\underline{\widetilde{W}}}^{H}_{t+1} - l^{a}_{x+t}V^{a}_{x+t} \quad (2-13)$$

である．ただし，右辺の第２項は

$$\underline{\underline{\widetilde{\hat{S}}}}^{a}_{t+1} = l^{a}_{x+t} q_{x+t} \cdot K \max\left(1, \widetilde{R}_{t+1}\right) \quad (2-14)$$

即ち実際の死亡率ではなく，予定死亡率を使う.（運用には左右されるため依然として確率変数であることに注意すること.）払済契約に対する分は

$$\underline{\underline{\widetilde{V}}}^{H}_{t+1} - \underline{\underline{V}}^{H}_{t} = \left(1 + i_H\right)\underline{\underline{V}}^{H}_{t} - q_{x+t}\underline{\underline{H}}_{t} + \underline{\underline{\widetilde{W}}}^{H}_{t+1} + \underline{\underline{\widetilde{D}}}^{aH}_{t+1} - \underline{\underline{V}}^{H}_{t} \quad (2-15)$$

となる，なお，右辺２項目の死亡保険金$q_{x+t}\underline{\underline{H}}_t$は実際死亡率ではなく予定死亡率を使って計算する．

また *t+1* 年度末払済契約の保険金累計は

$$\underline{\underline{\widetilde{H}}}_{t+1}=\underline{\underline{H}}_t+\frac{\underline{\underline{\widetilde{W}}}^{H}_{t+1}+\underline{\underline{\widetilde{D}}}^{aH}_{t+1}}{A^{H}_{x+t+1:\overline{n-t-1}|}}$$

となる．　ただし，

$$A^{H}_{x+s:\overline{n-s}|}\equiv\sum_{u=0}^{n-s}{}_{u}p_{x+s}q_{x+s+u}\left(1+i_H\right)^{-u}+{}_{n-s}p_{x+s}\left(1+i_H\right)^{-(n-s)},$$

$${}_{t}p_{x}\equiv\begin{cases}1 & (t=0)\\ \prod_{s=0}^{t-1}\left(1-q_{x+s}\right) & (t>0)\end{cases}$$

であり，$A^{H}_{x+s:\overline{n-s}|}$は確率変数ではないことに注意する．

（6）配当準備金への繰入

責任準備金と同様，*t+1* 年度末と *t+1* 年度初＝*t* 年度末の差額が繰入である．即ち

$$\begin{aligned}\tilde{l}^{a}_{x+t+1}\tilde{D}_{x+t+1}-l^{a}_{x+t}D_{x+t}&=\left(1+i_D\right)l^{a}_{x+t}D_{x+t}\\&\quad+c\cdot\max\left(0,q_{x+t}-\tilde{q}_{x+t}\right)\cdot K\max\left(1,\tilde{R}_{t+1}\right)\cdot l^{a}_{x+t}\left(1-\tilde{q}_{x+t}-\tilde{w}^{K}_{x+t}-\tilde{w}^{H}_{x+t}\right)\\&\quad-\underline{\underline{\tilde{D}}}^{ad}_{t+1}-\underline{\underline{\tilde{D}}}^{aK}_{t+1}-\underline{\underline{\tilde{D}}}^{aH}_{t+1}-l^{a}_{x+t}D_{x+t}\end{aligned}\qquad(2-16)$$

これは，配当準備金の積立配当利息分による増加，死亡率の予定との乖離による差のうち配当準備金へ繰り入れる分，死亡契約へ支払う分，解約契約へ支払う分，そして払済養老保険契約へ転換して責任準備金へ繰り入れた分，からなる．

（7）保険料収入（年度初）

t+1 年度初め即ち時点 *t* において収入される保険料は，$\pi\cdot l^{a}_{x+t}$である．

（8）運用収益

運用は特別勘定に係る分と一般勘定にかかる分からなり，後者は固定としている．即ち，特別勘定に係る分

$$\left(\frac{\widetilde{R}_t}{R_{t-1}}-1\right)\left(\underline{\underline{A}}^{a}_{t-1}+l^{a}_{x+t-1}\pi\right)\qquad(2-17)$$

一般勘定に係る分

$$i_H\,\underline{\underline{A}}^{H}_{t-1}\qquad(2-18)$$

となっている．

2.2.3 期末における貸借対照表

t+1 年度末（時点 *t+1*）の貸借対照表は以下の通りである．

表 2: 第 *t+1* 決算年度末の貸借対照表

$\underline{\underline{\tilde{A}}}_{t+1}^{H}$ ：資産（一般勘定）	$\underline{\underline{\tilde{V}}}_{t+1}^{H}$ ：責任準備金（一般勘定）
$\underline{\underline{\tilde{A}}}_{t+1}^{a}=\tilde{l}_{x+t+1}^{a}\tilde{A}_{t+1}^{a}$ ：資産（特別勘定）	$\underline{\underline{\tilde{V}}}_{t+1}^{a}=\tilde{l}_{x+t+1}^{a}\tilde{V}_{t+1}^{a}$ ：責任準備金（特別勘定）
	$\underline{\underline{\tilde{D}}}_{t+1}=\tilde{l}_{x+t+1}^{a}\tilde{D}_{t+1}$ ：配当準備金
	$\underline{\underline{\tilde{C}}}_{t+1}$ ：株主資本

前節で明らかにした第 *t+1* 決算年度中に発生する費用収益を勘案すると，各勘定科目は以下の通りになる．

$$\underline{\underline{\tilde{A}}}_{t+1}^{H}=\left(1+i_{H}\right)\underline{\underline{A}}_{t}^{H}+\underline{\underline{\tilde{W}}}_{t+1}^{H}+\underline{\underline{\tilde{D}}}_{t+1}^{aH}-\underline{\underline{\tilde{S}}}_{t+1}^{H} \qquad (2-19)$$

$$\underline{\underline{\tilde{A}}}_{t+1}^{a}=\tilde{l}_{x+t+1}^{a}\tilde{A}_{x+t+1}^{a}=\frac{\tilde{R}_{t+1}}{R_{t}}\left(\underline{\underline{A}}_{t}^{a}+l_{x+t}^{a}\pi\right)-\underline{\underline{\tilde{S}}}_{t+1}^{a}-\underline{\underline{\tilde{W}}}_{t+1}^{K}-\underline{\underline{\tilde{W}}}_{t+1}^{H}-\underline{\underline{\tilde{D}}}_{t+1}^{ad}-\underline{\underline{\tilde{D}}}_{t+1}^{aK}-\underline{\underline{\tilde{D}}}_{t+1}^{aH} \qquad (2-20)$$

$$\underline{\underline{\tilde{V}}}_{t+1}^{H}=\left(1+i_{H}\right)\underline{\underline{V}}_{t}^{H}-q_{x+t}H_{t}+\underline{\underline{\tilde{W}}}_{t+1}^{H}+\underline{\underline{\tilde{D}}}_{t+1}^{aH} \qquad (2-21)$$

$$\underline{\underline{\tilde{V}}}_{t+1}^{a}=\tilde{l}_{x+t+1}^{a}\tilde{V}_{x+t+1}^{a}=\frac{\tilde{R}_{t+1}}{R_{t}}\left(\underline{\underline{V}}_{t}^{a}+l_{x+t}^{a}\pi\right)-\underline{\underline{\tilde{\hat{S}}}}_{t+1}^{a}-\underline{\underline{\tilde{V}}}_{t+1}^{aK}-\underline{\underline{\tilde{W}}}_{t+1}^{H} \qquad (2-22)$$

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\tilde{D}}}_{t+1}&=\tilde{l}_{x+t+1}^{a}\tilde{D}_{t+1}=\left(1+i_{D}\right)\underline{\underline{D}}_{t}+c\cdot\max\left(0,q_{x+t}-\tilde{q}_{x+t}\right)\cdot l_{x+t}^{a}\left(1-\tilde{q}_{x+t}-\tilde{w}_{x+t}^{K}-\tilde{w}_{x+t}^{H}\right)\\&-\underline{\underline{\tilde{D}}}_{t+1}^{ad}-\underline{\underline{\tilde{D}}}_{t+1}^{aK}-\underline{\underline{\tilde{D}}}_{t+1}^{aH}\end{aligned} \qquad (2-23)$$

そして，期末の株主資本は

$$\underline{\underline{\tilde{C}}}_{t+1}=\underline{\underline{\tilde{A}}}_{t+1}^{H}+\underline{\underline{\tilde{A}}}_{t+1}^{a}-\underline{\underline{\tilde{V}}}_{t+1}^{H}-\underline{\underline{\tilde{V}}}_{t+1}^{a}-\underline{\underline{\tilde{D}}}_{t+1} \qquad (2-24)$$

である．この右辺に(2.19)～(2.23)を代入し，さらに(2.5)～(2.18)までを考慮して整理すると，次の通り *t+1* 年度末株式資本を確率変数として表すことができる．

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\tilde{C}}}_{t+1}&=\left(1+i_{H}\right)\left(\underline{\underline{A}}_{t}^{H}-\underline{\underline{V}}_{t}^{H}\right)-\left(1+i_{D}\right)\underline{\underline{D}}_{t}+\frac{\tilde{R}_{t+1}}{R_{t}}\left(\underline{\underline{A}}_{t}^{a}-\underline{\underline{V}}_{t}^{a}\right)+\frac{\tilde{R}_{t+1}}{R_{t}}\tilde{w}_{x+t}^{K}\underline{\underline{V}}_{t}^{a}\cdot\frac{\alpha\max\left(k-t,0\right)}{k}\\&+\left(1-c\right)\cdot\max\left(0,q_{x+t}-\tilde{q}_{x+t}\right)K\max\left(1,\tilde{R}_{t+1}\right)\cdot l_{x+t}^{a}\left(1-\tilde{q}_{x+t}-\tilde{w}_{x+t}^{K}-\tilde{w}_{x+t}^{H}\right)\\&+\underline{\underline{H}}_{t}\cdot\max\left(0,q_{x+t}-\tilde{q}_{x+t}\right)\end{aligned} \qquad (2-25)$$

(2.25)の右辺は，次の６項目の和になっていることに注意する．

$$\underline{\underline{C}}^{(0)}_{t+1} = (1+i_H)\left(\underline{\underline{A}}^H_t - \underline{\underline{V}}^H_t\right) - (1+i_D)\underline{\underline{D}}_t \tag{2－25a}$$

$$\underline{\underline{\widetilde{C}}}^{(1)}_{t+1} = \frac{\widetilde{R}_{t+1}}{R_t}\left(\underline{\underline{A}}^a_t - \underline{\underline{V}}^a_t\right) \tag{2－25b}$$

$$\underline{\underline{\widetilde{C}}}^{(2)}_{t+1} = \frac{\widetilde{R}_{t+1}}{R_t}\widetilde{w}^K_{x+t}\underline{\underline{V}}^a_t \cdot \frac{\alpha \max(k-t,0)}{k} \tag{2－25c}$$

$$\underline{\underline{\widetilde{C}}}^{(3)}_{t+1} = (1-c)\cdot \max\left(0, q_{x+t} - \widetilde{q}_{x+t}\right) l^a_{x+t}\left(1-\widetilde{q}_{x+t}\right) K \max\left(1, \widetilde{R}_{t+1}\right) \tag{2－25d}$$

$$\underline{\underline{\widetilde{C}}}^{(4)}_{t+1} = -(1-c)\cdot \max\left(0, q_{x+t} - \widetilde{q}_{x+t}\right) l^a_{x+t}\left(\widetilde{w}^K_{x+t} + \widetilde{w}^H_{x+t}\right) K \max\left(1, \widetilde{R}_{t+1}\right) \tag{2－25e}$$

$$\underline{\underline{\widetilde{C}}}^{(5)}_{t+1} = \underline{\underline{H}}_t \cdot \max\left(0, q_{x+t} - \widetilde{q}_{x+t}\right) \tag{2－25f}$$

3　株主資本の評価と，その比較静学分析

3.1 最も単純なケースでの計算（主要な確率変数が独立な対数正規分布に従う場合）

こうしてモデルでの株主資本が確率変数の形で得られたので，各不確実要素に適当な確率分布を与えればその平均値を計算することができる．特に代表的投資家が存在し，線型の効用関数を持つのであれば，実確率による平均値計算が株式価値を与える[8]．本稿ではまず，一部を外生変数化して最も単純なケースを計算する．

命題 1：

死亡実績と運用利回りがそれぞれ対数正規分布に従う独立な確率変数，解約率等が外生変数としたとき，*t+1* 年度末株主資本の *t* 時点平均値は，以下のようになる．

$$\begin{aligned}
E_t\left[\underline{\underline{\widetilde{C}}}_{t+1}\right] &= (1+i_H)\left(\underline{\underline{A}}^H_t - \underline{\underline{V}}^H_t\right) - (1+i_D)\underline{\underline{D}}_t \\
&+ \left\{\left(\underline{\underline{A}}^a_t - \underline{\underline{V}}^a_t\right) + w^K_{x+t}\underline{\underline{V}}^a_t \cdot \frac{\alpha \max(k-t,0)}{k}\right\} \cdot \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) \\
&+ \left\{(1-c)Kl^a_{x+t}\left(1 - w^K_{x+t} - w^H_{x+t}\right) \cdot F^1_t(\mu,\sigma) + \underline{\underline{H}}_{t-1}\right\} \cdot F^2_t\left(\mu_{q,x+t}, \sigma_{q,x+t}\right) \\
&- (1-c)Kl^a_{x+t} \cdot F^1_t(\mu,\sigma) \cdot F^3_t\left(\mu_{q,x+t}, \sigma_{q,x+t}\right)
\end{aligned} \tag{3－1}$$

ただし，

$$F^1_t(\sigma,\mu) \equiv N\left(\frac{-\ln(R_t) - \mu}{\sigma}\right) + R_t \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot N\left(\frac{\ln(R_t) + \mu + \sigma^2}{\sigma}\right) \tag{3－2}$$

---

[8]現実の投資家がリスク回避的であるならば当然，リスク回避を反映した確率測度を調整した上での期待値計算が必要になる．

$$F_t^2\left(\mu_{q,x+t},\sigma_{q,x+t}\right)$$
$$\equiv \exp\left(\eta_{x+t}\right)\cdot N\left(\frac{\eta_{x+t}-\mu_{q,x+t}}{\sigma_{q,x+t}}\right)-\exp\left(\mu_{q,x+tt}+\frac{\sigma_{q,x+t}{}^2}{2}\right)\cdot N\left(\frac{\eta_{x+t}-\mu_{q,x+t}-\sigma_{q,x+t}{}^2}{\sigma_{q,x+t}}\right) \quad (3-3)$$

$$F_t^3\left(\mu_{q,x+t},\sigma_{q,x+t}\right)$$
$$\equiv \exp\left(\eta_{x+t}+\mu_{q,x+t}+\frac{\sigma_{q,x+t}{}^2}{2}\right)\cdot N\left(\frac{\eta_{x+t}-\mu_{q,x+t}-\sigma_{q,x+t}{}^2}{\sigma_{q,x+t}}\right)$$
$$-\exp\left(2\mu_{q,x+t}+2\sigma_{q,x+t}{}^2\right)\cdot N\left(\frac{\eta_{x+t}-\mu_{q,x+t}-2\sigma_{q,x+t}{}^2}{\sigma_{q,x+t}}\right) \quad (3-4)$$

（証明）

まず各確率変数の独立性から，平均値は次の通りとなる．

$$E_t\left[\underline{\underline{\tilde{C}}}_{t+1}\right]=\left(1+i_H\right)\left(\underline{\underline{A}}_t^H-\underline{\underline{V}}_t^H\right)-\left(1+i_D\right)\underline{\underline{D}}_t+\left(\underline{\underline{A}}_t^a-\underline{\underline{V}}_t^a\right)\cdot E_t\left[\frac{\tilde{R}_{t+1}}{R_t}\right]$$
$$+w_{x+t}^K\underline{\underline{V}}_t^a\cdot\frac{\alpha\max(k-t,0)}{k}\cdot E_t\left[\frac{\tilde{R}_{t+1}}{R_t}\right]$$
$$+(1-c)Kl_{x+t}^a\left(1-w_{x+t}^K-w_{x+t}^H\right)\cdot E_t\left[\max\left(q_{x+t}-\tilde{q}_{x+t},0\right)\right]\cdot E_t\left[\max\left(\tilde{R}_{t+1},1\right)\right]$$
$$-(1-c)Kl_{x+t}^a\cdot E_t\left[\tilde{q}_{x+t}\cdot\max\left(q_{x+t}-\tilde{q}_{x+t},0\right)\right]\cdot E_t\left[\max\left(\tilde{R}_{t+1},1\right)\right]$$
$$+\underline{\underline{H}}_t\cdot E_t\left[\max\left(q_{x+t}-\tilde{q}_{x+t},0\right)\right] \quad (3-5)$$

以下，死亡率についての確率分布が

$$\tilde{\eta}_{x+t}\equiv\log\left(\tilde{q}_{x+t}\right)\sim N\left(\mu_{q,x+t},\sigma_{q,x+t}^2\right)$$

に従うとし，また$\eta_{x+t}\equiv\log\left(q_{x+t}\right)$とする．

$$N(x)\equiv\int_{-\infty}^{x}n(y)dy=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)dy \qquad n(x)\equiv\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

とおくと，

$$E_t\left[\frac{\tilde{R}_{t+1}}{R_t}\right]=E_t\left[\exp\left(\mu+\sigma\tilde{X}_t\right)\right]=\exp\left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right) \quad (3-6)$$

$$E_t\left[\max\left(\widetilde{R}_{t+1},1\right)\right]=E_t\left[R_t\cdot\max\left(\exp\left(\mu+\sigma\widetilde{X}_t\right),\frac{1}{R_t}\right)\right]$$

$$=R_t\left(\frac{1}{R_t}\cdot\Pr\left(\exp\left(\mu+\sigma\widetilde{X}_t\right)<\frac{1}{R_t}\right)+E_t\left[\exp\left(\mu+\sigma\widetilde{X}_t\right)\cdot 1_{\exp\left(\mu+\sigma\widetilde{X}_t\right)>\frac{1}{R_t}}\right]\right)$$

$$=R_t\left(\frac{1}{R_t}\cdot\Pr\left(\widetilde{X}_t<-\frac{\log(R_t)+\mu}{\sigma}\right)+e^{\mu}E_t\left[\exp\left(\sigma\widetilde{X}_t\right)\cdot 1_{\widetilde{X}_t>-\frac{\log(R_t)+\mu}{\sigma}}\right]\right)$$

そこで$d_1\equiv\dfrac{\ln(R_t)+\mu}{\sigma}$とおけば，括弧内について

１項目$=\dfrac{1}{R_t}\cdot N(-d_1)$　であり，２項目は（係数e^{μ}を除いて）

$$=\int_{x=-d_1}^{\infty}\exp(\sigma x)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx=\exp\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)\int_{-d_1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-\sigma)^2}{2}\right)$$

$$=\exp\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)\int_{-d_1-\sigma}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx=\exp\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)\cdot N(d_1+\sigma)$$

よって，$E_t\left[\max\left(\widetilde{R}_{t+1},1\right)\right]=N(-d_1)+R_t\exp\left(\mu+\dfrac{\sigma^2}{2}\right)\cdot N(d_1+\sigma)$　　(3−7)

である．また,

$$E_t\left[\max\left(q_{x+t}-\widetilde{q}_{x+t},0\right)\right]=E_t\left[\max\left(\exp(\eta_{x+t})-\exp(\widetilde{\eta}_{x+t}),0\right)\right]$$

$$=E_t\left[\left(\exp(\eta_{x+t})-\exp(\widetilde{\eta}_{x+t})\right)1_{\widetilde{\eta}_{x+T}\le\eta_{x+t}}\right]$$

$$=\exp(\eta_{x+t})\cdot\Pr\left(\widetilde{\eta}_{x+t}\le\eta_{x+t}\right)-E_t\left[\exp(\widetilde{\eta}_{x+t})\cdot 1_{\widetilde{\eta}_{x+t}\le\eta_{x+t}}\right]$$

$$=\exp(\eta_{x+t})\cdot N\left(\frac{\eta_{x+t}-\mu_{q,x+t}}{\sigma_{q,x+t}}\right)-\int_{-\infty}^{\eta_{x+t}}e^x\cdot\frac{1}{\sigma_{q,x+t}\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{\left(x-\mu_{q,x+t}\right)^2}{2\sigma_{q,x+t}{}^2}\right)dx$$

$$=\exp(\eta_{x+t})\cdot N\left(\frac{\eta_{x+t}-\mu_{q,x+t}}{\sigma_{q,x+t}}\right)$$

$$-\exp\left(\mu_{q,x+t}+\frac{\sigma_{q,x+t}{}^2}{2}\right)\int_{-\infty}^{\eta_{x+t}}\frac{1}{\sigma_{q,x+t}\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{\left(x-\mu_{q,x+t}-\sigma_{q,x+t}{}^2\right)^2}{2\sigma_{q,x+t}{}^2}\right)dx$$

よって,

$$E_t\left[\max\left(q_{x+t}-\widetilde{q}_{x+t},0\right)\right]$$

$$=\exp(\eta_{x+t})\cdot N\left(\frac{\eta_{x+t}-\mu_{q,x+t}}{\sigma_{q,x+t}}\right)-\exp\left(\mu_{q,x+tt}+\frac{\sigma_{q,x+t}{}^2}{2}\right)\cdot N\left(\frac{\eta_{x+t}-\mu_{q,x+t}-\sigma_{q,x+t}{}^2}{\sigma_{q,x+t}}\right)\quad(3-8)$$

さらに,

$$E_t\left[\tilde{q}_{x+t}\cdot\max\left(q_{x+t}-\tilde{q}_{x+t},0\right)\right]=E_{t-1}\left[e^{\tilde{\eta}_{x+t}}\max\left(e^{\eta_{x+t}}-e^{\tilde{\eta}_{x+t}},0\right)\right]$$
$$=E_t\left[\max\left(e^{\tilde{\eta}_{x+t}+\eta_{x+t}}-e^{2\tilde{\eta}_{x+t}},0\right)\right]=E_{t-1}\left[\exp\left(\tilde{\eta}_{x+t}+\eta_{x+t}\right)\cdot 1_{\tilde{\eta}_{x+t}\le\eta_{x+t}}\right]-E_t\left[\exp\left(2\tilde{\eta}_{x+t}\right)\cdot 1_{\tilde{\eta}_{x+t}\le\eta_{x+t}}\right]$$

であるが，この１項目は

$$=e^{\eta_{x+T}}\int_{-\infty}^{\eta_{x+t}}e^{x}\cdot\frac{1}{\sigma_{q,x+t}\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{\left(x-\mu_{q,x+t}\right)^2}{2\sigma_{q,x+t}{}^2}\right)dx$$
$$=\exp\left(\eta_{x+t}+\mu_{q,x+t}+\frac{\sigma_{q,x+t}{}^2}{2}\right)\cdot N\left(\frac{\eta_{x+t}-\mu_{q,x+t}-\sigma_{q,x+t}{}^2}{\sigma_{q,x+t}}\right)$$

２項目は

$$=\int_{-\infty}^{\eta_{x+t}}e^{2x}\cdot\frac{1}{\sigma_{q,x+t}\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{\left(x-\mu_{q,x+t}\right)^2}{2\sigma_{q,x+t}{}^2}\right)dx$$
$$=\exp\left(2\mu_{q,x+t}+2\sigma_{q,x+t}{}^2\right)\int_{-\infty}^{\eta_{x+t}}\frac{1}{\sigma_{q,x+t}\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{\left(x-\mu_{q,x+t}-2\sigma_{q,x+t}{}^2\right)}{2\sigma_{q,x+t}{}^2}\right)dx$$
$$=\exp\left(2\mu_{q,x+t}+2\sigma_{q,x+t}{}^2\right)\cdot N\left(\frac{\eta_{x+t}-\mu_{q,x+t}-2\sigma_{q,x+t}{}^2}{\sigma_{q,x+t}}\right)$$

したがって，

$$E_t\left[\tilde{q}_{x+t}\cdot\max\left(q_{x+t}-\tilde{q}_{x+t},0\right)\right]$$
$$=\exp\left(\eta_{x+t}+\mu_{q,x+t}+\frac{\sigma_{q,x+t}{}^2}{2}\right)\cdot N\left(\frac{\eta_{x+t}-\mu_{q,x+t}-\sigma_{q,x+t}{}^2}{\sigma_{q,x+t}}\right)$$
$$-\exp\left(2\mu_{q,x+t}+2\sigma_{q,x+t}{}^2\right)\cdot N\left(\frac{\eta_{x+t}-\mu_{q,x+t}-2\sigma_{q,x+t}{}^2}{\sigma_{q,x+t}}\right)\qquad(3-9)$$

(3.6)，(3.7)，(3.8)，(3.9)を(3.5)に代入して，(3.1)を得る．（証明終わり）

3.2 比較静学分析

こうして *t+1* 年度末決算時の株主資本が確率変動する「運用」「死亡率」の位置母数（対数平均）・尺度母数（対数標準偏差）の関数として表すことができたので，その比較静学分析を試みる．特に運用に係る対数標準偏差（これは，会社側による制御が容易なパラメータである）に対する感応度がどうなるかを調べることは興味深い．株主資本期待値 (3.1)の両辺をσで微分してみよう．

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}E_t\left[\underline{\underline{\tilde{C}}}_{t+1}\right]=\left\{\left(\underline{\underline{A}}^a_t-\underline{\underline{V}}^a_t\right)+w^K_{x+t}\underline{\underline{V}}^a_t\cdot\frac{\alpha\max\left(k-t,0\right)}{k}\right\}\sigma\cdot\exp\left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right)$$
$$+(1-c)Kl^a_{x+t}\left\{\left(1-w^K_{x+t}-w^H_{x+t}\right)\cdot F^2_t\left(\mu_{q,x+t},\sigma_{q,x+t}\right)-F^3_t\left(\mu_{q,x+t},\sigma_{q,x+t}\right)\right\}\cdot\frac{\partial}{\partial\sigma}F^1_t\left(\mu,\sigma\right)\qquad(3-10)$$

ここで(4.5)の右辺第１項は，*t* に関する数学的帰納法から明らかに正である．また

$$F_t^2(\mu_{q,x+t},\sigma_{q,x+t}) = E_t[\max(0, q_{x+t} - \tilde{q}_{x+t})]$$

$$F_t^3(\mu_{q,x+t},\sigma_{q,x+t}) = E_t[\tilde{q}_{x+t}\max(0, q_{x+t} - \tilde{q}_{x+t})] \cong E_t[\tilde{q}_{x+t}]F_t^2(\mu_{q,x+t},\sigma)$$

$$\Pr(1 - w_{x+t}^K - w_{x+t}^H - \tilde{q}_{x+t} > 0) = 1$$

から,

$$(1 - w_{x+t}^K - w_{x+t}^H)\cdot F_t^2(\mu_{q,x+t},\sigma_{q,x+t}) - F_t^3(\mu_{q,x+t},\sigma_{q,x+t}) > 0$$

が成り立つので，(3.10)第２項の，$\frac{\partial}{\partial\sigma}F_t^1$ 以外の係数は正である．あとは残った項の水準を評価すればよい．

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}F_t^1(\mu,\sigma) = \frac{\ln R_t + \mu}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln R_t + \mu}{\sigma}\right)^2\right)$$
$$+R_t\left\{\begin{aligned}&\sigma\exp\left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right)N\left(\frac{\ln R_t+\mu}{\sigma}+\sigma\right)\\&+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(1-\frac{\ln R_t+\mu}{\sigma^2}\right)\exp\left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln R_t+\mu}{\sigma}+\sigma\right)^2\right)\end{aligned}\right\} \quad (3-11)$$

となるが，この１項目は正であるため右辺をσ＞０と$d_2 \equiv \frac{\ln R_t + \mu}{\sigma} + \sigma > 2\sqrt{\ln R_t + \mu}$ についての関数とみなして整理し書き直すと以下の通りである.

$$\begin{aligned}(3.11)\text{右辺2項目} &= \frac{R_t e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}}{\sigma}\left\{\sigma^2 N(d_2) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(2\sigma - d_2)\exp\left(-\frac{1}{2}d_2^2\right)\right\}\\ &= \frac{R_t e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}}{\sigma}\left\{N(d_2)\sigma^2 + \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\sigma - \frac{d_2}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}d_2^2\right)\right\}\end{aligned}$$

そのオーダーを見れば明らかなように，この残余項はσ>0 の関数として，一定の数字以上であれば常に正の値をとる．従って(3.10)はほとんど正，即ちσが大きいほど株主資本は大きくなることになる．その主因は２つあり，ひとつは解約控除に基づく会社の利益がσにより大きくなる関係にあることである．もうひとつはより重要であり，この株主資本が，複雑な外見にも関わらず基本的にヨーロピアン・オプションの形になっていることである．一般にヨーロピアン・オプションのσに関する１階偏微分（ベガ）は，プット・コールを問わず正であるのはよく知られている通り（例えば参考文献[7]を参照のこと）であり，このことからの直接な帰結として，$E_t\left[\underline{\underline{\tilde{C}}}_{t+1}\right]$がσについて増加関数となっていると考えられる.

3.3 より複雑な場合の計算（相関がある場合）

次に，$t+1$ 年度末株主資本をその年度初時点（時点 t）で解析的に平均値計算できたこの例を，もう少し拡張できないかと考えてみよう．例えば各確率変数に相関がある場合はどうであろうか．また，扱う保険商品のペイオフがもう少し複雑な場合はどうであろうか．これを説明するため，ひとつ定義を与える．

定義１：

正値のみ取る m 次元確率変数 $\left(X_j\right)_{j=1,\cdots,m}$ について，正定数からなる点 $\left(a_j\right)_{j=1,\cdots,m}$ が存在し，全ての j について

$$\ln X_j = \ln a_j + \frac{1}{a_j}\left(X_j - a_j\right) + \cdots$$

なるテイラー展開がほとんど確実に成り立つとする．このとき $\left(a_j\right)_{j=1,\cdots,m}$ を $\left(X_j\right)_{j=1,\cdots,m}$ の「近似点」と呼び，

「$\left(X_j\right)_{j=1,\cdots,m}$ は $\left(a_j\right)_{j=1,\cdots,m}$ の近傍で安定的である」と呼ぶ．

この概念を用いると，簡単な考察により以下が言える．（詳細は補遺Aにて述べる．）

命題 2:

2 章において与えたモデルにおいて，4 つの不確定要素

（1） 変額ファンドの運用利回り：$\tilde{R}_{t+1}/R_t$

（2） 死亡率：$\tilde{q}_{x+t}$

（3） 解約率：$\tilde{w}^K_{x+t}$

（4） 払済転換率：$\tilde{w}^H_{x+t}$

が，ある結合確率測度について点 $\left(c_R, c_q, c_K, c_H\right)$ の近傍で安定的であって，かつ

$$\begin{pmatrix} \ln\left(\tilde{R}_{t+1}/R_t\right) \\ \ln\left(\tilde{q}_{x+t}\right) \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} \mu \\ \mu_{q,x+t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma^2 & \sigma_{Rq,t} \\ \sigma_{Rq,t} & \sigma^2_{q,x+t} \end{pmatrix}\right)$$

$$Cov\left[\ln\left(\tilde{R}_{t+1}/R_t\right), \ln\left(\tilde{w}^K_{x+t}\right)\right] = \sigma_{RK,t}, \quad Cov\left[\ln\left(\tilde{q}_{x+t}\right), \ln\left(\tilde{w}^K_{x+t}\right)\right] = \sigma_{qK,t}$$

$$Cov\left[\ln\left(\tilde{R}_{t+1}/R_t\right), \ln\left(\tilde{w}^H_{x+t}\right)\right] = \sigma_{RH,t}, \quad Cov\left[\ln\left(\tilde{q}_{x+t}\right), \ln\left(\tilde{w}^H_{x+t}\right)\right] = \sigma_{qH,t}$$

であるとする．さらに，安定点 $\left(c_R, c_q, c_K, c_H\right)$ の近傍で，$\underline{\underline{\tilde{C}^{(j)}}}_{t+1} \equiv f_j\left(\tilde{R}_{t+1}/R_t, \tilde{q}_{x+t}, \tilde{w}^K_{x+t}, \tilde{w}^H_{x+t}\right)$ はいずれも滑らかであるとする（$j = 1, \cdots, 6$）．この時，その確率測度に基づく株主資本の平均値は近似的に次のように書ける．

$$
\begin{aligned}
&E_t\left[\underline{\underline{\tilde{C}}}_{t+1}\right] \approx A_{0000} + A_{1000}\exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) + A_{0100}\exp\left(\mu_{q,x+t} + \frac{\sigma_{q,x+t}^2}{2}\right) \\
&+A_{0010}E_t\left[\tilde{w}_{x+t}^K\right] + A_{0001}E_t\left[\tilde{w}_{x+t}^H\right] + A_{1100}\exp\left(\mu + \mu_q + \frac{\sigma^2 + \sigma_{q,x+t}^2 + 2\sigma_{Rq,t}}{2}\right) \\
&+A_{1010}\left\{E\left[\tilde{w}_{x+t}^K\right]\exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) + c_R c_K \sigma_{RK,t}\right\} + A_{1001}\left\{E\left[\tilde{w}_{x+t}^H\right]\exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) + c_R c_H \sigma_{RH,t}\right\} \\
&+A_{0110}\left\{E\left[\tilde{w}_{x+t}^K\right]\exp\left(\mu_{q,x+t} + \frac{\sigma_{q,x+t}^2}{2}\right) + c_q c_K \sigma_{qK,t}\right\} \\
&+A_{0101}\left\{E\left[\tilde{w}_{x+t}^H\right]\exp\left(\mu_{q,x+t} + \frac{\sigma_{q,x+t}^2}{2}\right) + c_q c_H \sigma_{qH,t}\right\} \\
&+A_{1110}\left\{E\left[\tilde{w}_{x+t}^K\right]\exp\left(\mu + \mu_q + \frac{\sigma^2 + \sigma_{q,x+t}^2 + 2\sigma_{Rq,t}}{2}\right) + c_R c_q c_K\left(\sigma_{RK,t} + \sigma_{qK,t}\right)\right\} \\
&+A_{1101}\left\{E\left[\tilde{w}_{x+t}^H\right]\exp\left(\mu + \mu_q + \frac{\sigma^2 + \sigma_{q,x+t}^2 + 2\sigma_{Rq,t}}{2}\right) + c_R c_q c_H\left(\sigma_{RH,t} + \sigma_{qH,t}\right)\right\} \qquad (3.8)
\end{aligned}
$$

ただし，各係数 A_{hijk} は時点 t における数値並びに近似点のみに依存する定数である.

4 結論と今後の課題

命題 1，命題 2 により，先に構築したモデルの *t+1* 年度末株主資本についての平均値が，特に死亡率・解約率・払済転換率も含めて対数正規分布に従うという仮定において，解析的に計算されることが示された．即ちこのモデルでは，従来の研究で個別に仮定していた各確率変動要素間の相関関係を総合的に取り扱える．のみならず，そのうちいくつかが対数正規分布に従わない場合であっても一定の前提があれば近似的に解析計算が可能であることも，明らかとなった.

一方本論文では，保険会社の保有する確率変動要素の性質について「対数値の分布が近似点から大きく乖離しない」場合に限っており，この仮定の妥当性に関する実証的な検証，ならびに条件緩和時の理論的分析は今後の課題としている．また，無リスク金利の変動など今回考慮外とした要素，多期間での株主資本評価など，当初本モデルで検討を予定していた要素には十分論議を進めることができなかった.

さらに，保険会社の資産には市場性がないため，その株主資本の公正な評価のためには，何らかの手法でリスク中立な測度へ変換する必要があるが，そのことがこの手法に与える影響も重要な論点である．これらにつき引き続き検討が必要と考える.

加えて今後の展開としては，多変量正規分布以外確率変数の依存性を表現するにあたり相関係数だけでは不十分であることを考えると，例えばコピュラによる分析などを検討するべきであると思われる.

以上

補遺A．命題２の証明について

まず次の補題は自明であろう．

補題１：

X，Y，Z を確率変数としたとき，

$$E[XYZ]=E[X]E[Y]E[Z]+\frac{1}{3}\left(E[X]Cov[Y,Z]+E[Y]Cov[Z,X]+E[Z]Cov[X,Y]\right)$$
$$+\frac{1}{3}\left(Cov[X,YZ]+Cov[Y,ZX]+Cov[Z,XY]\right). \qquad \text{(A－１)}$$

また，参考文献[8]に，次のような補題が示されている．

補題２：(Lemma 7 in Poon and Stapleton[2005], p.127)

正値のみ取る確率変数の組(X,Y)が点(a,b)の近傍で安定的であるならば，次が成り立つ．

$$Cov[X,Y]\approx ab\cdot Cov[\ln X,\ln Y] \qquad \text{(A－2)}$$

これらの補題から容易に，次の補題が成り立つことが言える．

補題３：

X,Y,Z を正値のみ取る確率変数とし，点(c_X,c_Y,c_Z)の近傍で安定的であるならば次のような近似式が成立する．ただし$U=\ln X, V=\ln Y, W=\ln Z$ である．

$$E[XYZ]\approx E[X]E[Y]E[Z]$$
$$+\frac{2c_Xc_Yc_Z}{3}\left\{\left(\frac{E[X]}{2c_X}+1\right)Cov[V,W]+\left(\frac{E[Y]}{2c_Y}+1\right)Cov[W,U]+\left(\frac{E[Z]}{2c_Z}+1\right)Cov[U,V]\right\} \quad (\mathrm{A}-3)$$

また特に$Z=1$とすれば次が成り立つ．

$$E[XY]\approx E[X]E[Y]+c_Xc_YCov[U,V] \qquad \text{(A－4)}$$

以上で，命題２を証明する準備ができた．

（命題２の証明）

(2.25)の右辺各項を分解した(2.25.a)～(2.25.f)は４つの不確定要素およびその関数（高々１次式）の，最大３つについての積に帰着する．かつ「解約率」と「払済転換率」についての積は登場しない．したがって$E_t\left[\underline{\underline{\tilde{C}}}_{t+1}\right]$はある定数係数$A_\alpha$（αは４桁の２進数なる添字）を用いて

$$E_t\left[\underline{\underline{\tilde{C}}}_{t+1}\right] \approx A_{0000} + A_{1000}E_t\left[\tilde{R}_{t+1}/R_t\right] + A_{0100}E_t\left[\tilde{q}_{x+t}\right] + A_{0010}E_t\left[\tilde{w}^K_{x+t}\right] + A_{0001}E_t\left[\tilde{w}^H_{x+t}\right]$$
$$+A_{1100}E_t\left[\left(\tilde{R}_{t+1}/R_t\right)\tilde{q}_{x+t}\right] + A_{1010}E\left[\left(\tilde{R}_{t+1}/R_t\right)\tilde{w}^K_{x+t}\right] + A_{1001}E\left[\left(\tilde{R}_{t+1}/R_t\right)\tilde{w}^H_{x+t}\right]$$
$$+A_{0110}E\left[\tilde{q}_{x+t}\tilde{w}^K_{x+t}\right] + A_{0101}E\left[\tilde{q}_{x+t}\tilde{w}^H_{x+t}\right]$$
$$+A_{1110}E\left[\tilde{w}^K_{x+t}\left(\left(\tilde{R}_{t+1}/R_t\right)\tilde{q}_{x+t}\right)\right] + A_{1101}E\left[\tilde{w}^H_{x+t}\left(\left(\tilde{R}_{t+1}/R_t\right)\tilde{q}_{x+t}\right)\right] \qquad \text{(A－5)}$$

このようにかける．ところで，$\begin{pmatrix} \ln\left(\tilde{R}_{t+1}/R_t\right) \\ \ln\left(\tilde{q}_{x+t}\right) \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} \mu \\ \mu_{q,x+t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma^2 & \sigma_{Rq,t} \\ \sigma_{Rq,t} & \sigma^2_{q,x+t} \end{pmatrix}\right)$から

$E_t\left[\tilde{R}_{t+1}/R_t\right] = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)$, $E_t\left[\tilde{q}_{t+1}\right] = \exp\left(\mu_{q,x+t} + \frac{\sigma_{q,x+t}{}^2}{2}\right)$，は明らかである．また

$\ln\left\{\left(\tilde{R}_{t+1}/R_t\right)\tilde{q}_{x+t}\right\} \sim N\left(\mu + \mu_{q,x+t}, \sigma^2 + \sigma^2_{q,x+t} + 2\sigma_{Rq,t}\right)$であるから

$E_t\left[\left(\tilde{R}_{t+1}/R_t\right)\tilde{q}_{x+t}\right] = \exp\left(\mu + \mu_{q,x+t} + \frac{\sigma^2 + \sigma_{q,x+t}{}^2 + 2\sigma_{Rq}}{2}\right)$も成り立つ．

また，補題３を用いると

$$E_t\left[\left(\tilde{R}_{t+1}/R_t\right)\tilde{w}^K_{x+t}\right] = E_t\left[\tilde{w}^K_{x+t}\right]\exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) + c_R c_K \sigma_{RK,t}$$

$$E_t\left[\left(\tilde{R}_{t+1}/R_t\right)\tilde{w}^H_{x+t}\right] = E_t\left[\tilde{w}^H_{x+t}\right]\exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) + c_R c_H \sigma_{RH,t}$$

$$E_t\left[\tilde{q}_{x+t}\tilde{w}^K_{x+t}\right] = E_t\left[\tilde{w}^K_{x+t}\right]\exp\left(\mu_{q,x+t} + \frac{\sigma_{q,x+t}{}^2}{2}\right) + c_q c_K \sigma_{qK,t}$$

$$E_t\left[\tilde{q}_{x+t}\tilde{w}^H_{x+t}\right] = E_t\left[\tilde{w}^H_{x+t}\right]\exp\left(\mu_{q,x+t} + \frac{\sigma_{q,x+t}{}^2}{2}\right) + c_q c_H \sigma_{qH,t}$$

これらを用いて（A－５）右辺の各項を書き直して整理したものが求める近似式（3－8）である．

（証明終わり）

この証明が，確率変数の項$\underline{\underline{\tilde{C}^{(j)}}}_{t+1} \equiv f_j\left(\tilde{R}_{t+1}/R_t, \tilde{q}_{x+t}, \tilde{w}^K_{x+t}, \tilde{w}^H_{x+t}\right)$が一般の関数であっても滑らか（テイラー展開可能）でさえあれば有効であることは興味深い．それは，モデルに盛り込んだ保険商品がより複雑なペイオフを含んでも同様に扱えることを示唆しているからである．モデル拡張へのひとつの手がかりと考える．

補遺 B: *n* 次元へ拡張した場合

今回は「運用」「死亡」「解約率」「払済変更」，という４つの不確実要素を取り扱ったが，不確実な要素がさらに増加している場合はどうなるだろうか．実は，その場合でも同時対数正規分布の仮定さえ満たされれば一般的な計算が可能であり，特にデリバティブの条件が単一（ダブル・バリアなどではない）である場合には，1 次元の標準正規分布関数だけで足りる．そのことは，次のことが成り立つことから明らかである．

命題：

１期間モデルにおいて，時刻 $t+1$ における経済状態を記述する n 個の確率変数が，n 次元正規分布に従うものとする．即ち

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \sim N\left(\vec{\mu}, \Sigma^2\right) = N\left(\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & & \sigma_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ \sigma_{1n} & \sigma_{2n} & & \sigma_{nn} \end{pmatrix}^2\right)$$

ここで定数ベクトルを $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$，$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ として条件付請求権を

$g\left(\vec{X}\right) = \exp\left(\vec{a}'\vec{X}\right)1_{\vec{b}'\vec{X} > K}$ と定義する（これは権利行使価格 K なるコールオプションの一般形である）．このとき，この請求権の t 時点フォワード価格は１変数の標準正規分布関数により

$$F_g \equiv E_t\left[\exp\left(\vec{a}'\vec{X}\,1_{\vec{b}'\vec{X} > K}\right)\right] = \exp\left(\vec{\mu}'\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{a}'\Sigma^2\vec{a}\right) \cdot N\left(\frac{\vec{b}'\left(\vec{\mu}' + \Sigma^2\vec{a}\right) - K}{\left\|\Sigma\vec{b}\right\|}\right) \quad \text{(B.1)}$$

とかける．

この証明は多次元正規分布の積率母関数に関する単純な計算問題であるため，省略する．例えば参考文献[6]を参照のこと．

謝辞
本論文は，早稲田大学大学院ファイナンス研究科・池田昌幸教授のご指導の下，同・森平爽一郎教授から有益なコメントを頂きつつ執筆した課題論文に基づくものである．加えて，匿名のレフリー２氏から数々の貴重なご意見をいただいている．記して謝意を表したい．

参考文献

[1]門田伸一(2006),「生命保険契約における転換権のオプション価値評価」,『日本保険・年金リスク学会誌』1, pp51-73

[2]小島茂(2007),「生命保険会社における死亡リスク・スワップ取引とその価格付けモデル」,『日本保険・年金リスク学会誌』 2，pp1-17

[3]谷口学史(2003),「生命保険における金利と解約率の相関関係に関する一考察」,『日本アクチュアリー会会報』56，pp233-251

[4] 牧田雄一(2003),「公正価値会計における保険負債と利益の認識」,『日本アクチュアリー会会報』56, pp179-232

[5]日本アクチュアリー会(2007),「生命保険会社の保険計理人の実務基準」平成 19 年 1 月 17 日改定

[6]竹内啓(1963),『数理統計学』,東洋経済新報社

[7]John C. Hull(2006), Options, Futures, and Other Derivatives Six Edition, Prentice Hall

[8]Poon and Stapleton[2005], *Asset Pricing in Discrete Time*, Oxford University Press